manual]. Kyiv.

3. *Iak provesty virtualnyi urok: pokrokova instruktsiia ta laifkhaky vchyteliv z usoho svitu* [How to conduct a virtual lesson: step-by-step instructions and life hacks for teachers from around the world].

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: методика навчання математики.

КОТЕЛЬНІКОВА Світлана Олександрівна – вчитель математики та інформатики ліцею №25 міста Кропивницький.

Наукові інтереси: методика навчання математики.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

VOJNALOVICH Natalia Mikhailivna – candidate of pedagogical sciences, docent of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of research interests: theory and methodology of teaching (mathematic).

KOTELNIKOVA Svitlana Oleksandrivna – teacher of Mathematics and Computer studying, lyceum №25, Kropyvnytskyi.

Circle of research interests: theory and methodology of teaching (mathematic)

Стаття надійшла до редакції 12.09.2020 р.

УДК 372.851
DOI: 10.36550/2415-7988-2020-1-191-58-61

ГАЄВСЬКИЙ Микола Вікторович –
кандидат фізико-математичних наук,
старший викладач кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID:https://orcid.org/0000-0001-5268-748X
e-mail: mgaevskij@gmail.com

ІЗЮМЧЕНКО Людмила Володимирівна –
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID:https://orcid.org/0000-0001-8656-2220
e-mail: l.iziumch@gmail.com

КЛЮЧНИК Інна Геннадіївна –
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID:https://orcid.org/0000-0001-6874-7811
e-mail: kl.innochka@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ДОВЕДЕННЯ ОЛІМПІАДНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Нерівності застосовуються у всіх розділах математики, вони мають дуже багато різних цікавих властивостей та численних застосувань. Досить часто важко знайти доведення чи розв'язання нерівності, не завжди досліднику вдається знайти коротке та елегантне рішення проблеми. Також особливістю нерівностей є наявність різних способів пошуку розв'язку. На даний час дана тематика є досить обширною і різноманітною – від класичних нерівностей до нерівностей, що отримані із застосуванням новітніх технологій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Різні аспекти формування та розвитку творчого мислення та творчої особистості учня досліджували такі вчені, як Бевз Г.П., Бурда М.І., Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я., Швець В.О., Тарасенкова Н.А. та ін. Особливості системної організації розв'язування нестандартних та олімпіадних задач досліджується в роботах Ясінського В.А. Мітельмана І.М., Вороного О.М., Ізюмченко Л.В., Радченка В.М., Рубльова Б.В., Федака І.В., Сарани О.О., Бродського Я.С, Сліпенка О.К., Добосевича М.С., Лейфури В.М, Е. Чена та ін. [1-7, 10]. Також не можна не згадати відомі монографії Гарді Г. Г., Літтлвуд Дж.Е., Пойа Г, Беккенбаха Е. та Беллмана Р. [8,9].

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених роботі з обдарованими учнями, підготовка школярів до участі у математичних турнірах висвітлена недостатньо та потребує подальшого дослідження.

Метою статті є дослідження особливостей підготовки учнів до розв'язування конкурсних та олімпіадних нерівностей деяких типів. Дослідити особливості використання апарату диференціального числення на рівні школяра старшої школи, проаналізувати можливості доведення іншими способами, їхні переваги та недоліки.

Методи дослідження. Для реалізації поставленої мети та виконання завдань статті використано теоретичні (аналіз першоджерел з проблеми дослідження, синтез, порівняння) методи дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нерівності займають важливе місце в олімпіадних задачах, їх доведення може спиратися на використання класичних нерівностей (Коші, Гельдера, Мінковського, Юнга, Ієнсена тощо), можна використовувати поняття і факти математичного аналізу тощо. Важливим є той факт, що при доведенні нерівностей досить часто не є очевидним застосування більшості відомих нерівностей (Коші, Гельдера, Мінковського, Юнга, Ієнсена, перестановочої нерівності тощо).

В цій роботі розглянемо можливості використання дотичної графіка функції та твердження про $(n-1)$ рівних значень при доведенні нерівностей.

Якщо в нерівності слід оцінити знизу величину на зразок $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$, *якщо відомо, що сума* $x_1+x_2+...+x_n$ *є фіксованою, то буває простіше встановити допоміжну нерівність*

$$f(x)\ge f(a)+f'(a)(x-a),\text{ де } a=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}.$$

Проілюструємо цей метод на наступному прикладі.

Задача 1. Довести, що для невід'ємних чисел a,b,c,d таких, що $a+b+c+d=1$ має місце нерівність

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}.$$

1 спосіб. З умови задачі слідує, що $0\le a,b,c,d\le 1$. Запишемо нерівність в такому вигляді

$$6a^3-a^2+6b^3-b^2+6c^3-c^2+6d^3-d^2\ge\frac{1}{8}.$$

Розглянемо функцію $f(x)=6x^3-x^2$ при $x\in[0,1]$, для неї $f'(x)=18x^2-2x, f''(x)=36x-2$. Як бачимо, на проміжку $[0,1]$ функція не є опуклою.

Розглянемо допоміжну нерівність

$$f(x)\ge f\left(\frac{1}{4}\right)+f'\left(\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow 6x^3-x^2\ge\frac{1}{32}+\frac{5}{8}\left(x-\frac{1}{4}\right) \text{ або}$$

$$6x^3-x^2\ge\frac{5x-1}{8}\Rightarrow 48x^3-8x^2-5x+1\ge 0\cdot$$

Далі, використавши теорему Безу про корені многочлена, бачимо, що $48x^3-8x^2-5x+1=(4x-1)^2(3x+1)\ge 0$ при $x\in[0,1]$, тобто, допоміжна нерівність вірна.

Інколи в справедливості допоміжної нерівності можна переконатися побудувавши графіки.

Отже,

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=6a^3-a^2+6b^3-b^2+6c^3-c^2+6d^3-d^2\ge$$

$$\ge\frac{5a-1}{8}+\frac{5b-1}{8}+\frac{5c-1}{8}+\frac{5d-1}{8}=\frac{5(a+b+c+d)-4}{8}=\frac{1}{8}.$$

Нерівність доведено.

Дану нерівність можна також довести використавши теорему про $(n-1)$ рівних значень:

Якщо $f(x)$ *диференційовна функція з однією точкою перегину,* $x_1,x_2,...,x_n$ *– деякий набір чисел із фіксованою сумою, то величина* $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$ *набуває свого найбільшого або найменшого значення за умови рівності* $n-1$ *значень* $x_1=x_2=...=x_{n-1}$.

2 спосіб.

Аналогічно розглянемо нерівність

$$6a^3-a^2+6b^3-b^2+6c^3-c^2+6d^3-d^2\ge\frac{1}{8}$$

та функцію $f(x)=6x^3-x^2$ при $x\in[0,1]$, для неї $f'(x)=18x^2-2x, f''(x)=36x-2$. Як бачимо, вона має одну точку перегину.

Нехай $a=b=c=x$ та $d=1-3x$, як бачимо $x\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$. Розглянемо функцію $g(x)=3f(x)+f(1-3x)$. Легко отримати, що

$$g(x)=-144x^3+150x^2-48x+5$$

та $g'(x)=-432x^2+300x-48=0$ при $x_1=\frac{1}{4}, x_2=\frac{4}{9}$. Як бачимо, x_2 нам не підходить.

В силу неперервності функції та застосування алгоритму знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку встановимо, що

$$\min_{x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]} g(x)=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{8}.$$

Отже,

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=6a^3-a^2+6b^3-b^2+6c^3-c^2+6d^3-d^2\ge g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{8}$$

Нерівність доведено.

Задача 2. Довести, що коли $a_1+a_2+...+a_n=1$, то $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\ge\frac{1}{n}$.

Для доведення нерівності використаємо метод дотичних. Розглянемо функцію $f:=f(x)=x^2$. Легко перевірити, що в кожній точці дотична буде знаходитися під її графіком. Цей факт можна проілюструвати графічно, а можна довести і аналітично. Дійсно, $f'(x)=2x$, тоді рівняння дотичної в точці x_0 є таким: $y=2x_0x-x_0^2$ і в кожній точці матимемо $f-y=x^2-2x_0x+x_0^2\ge 0$. Візьмемо $x_0=\frac{1}{n}$ і отримаємо $x^2-\frac{2x}{n}+\frac{1}{n^2}\ge 0$ або $x^2\ge\frac{2x}{n}-\frac{1}{n^2}$. Тоді для кожного $a_i, i=1,...,n$ будемо мати $a_i^2\ge\frac{2a_i}{n}-\frac{1}{n^2}$.

Лишилося додати всі нерівності

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 \ge \frac{2a_1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2a_2}{n}-\frac{1}{n^2}+...+\frac{2a_2}{n}-\frac{1}{n^2}=$$
$$=\frac{2(a_1+a_2+...+a_n)}{n}-\frac{n}{n^2}=\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}.$$

Нерівність доведено.

Задача 3. Нехай для трьох додатних чисел x,y,z має місце співвідношення $x+y+z=1$. Довести, що $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}$.

Без втрати загальності вважатимемо, що $x\ge y\ge z$, а, отже, будуть справедливі нерівності $x^3\ge y^3\ge z^3$ та $\frac{1}{z}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{x}$. Застосуємо переставну нерівність і отримаємо

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge\frac{x^3}{x}+\frac{y^3}{y}+\frac{z^3}{z}+\frac{x^3}{x}+\frac{y^3}{y}+\frac{z^3}{z}=2\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Тому, наша нерівність буде доведена, якщо буде справедлива допоміжну нерівність

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2} \text{ або}$$
$$\frac{3x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+\frac{3z^2}{2}\ge\frac{1}{2}.$$

Тут можна використати результат задачі 1 і отримати

$$\frac{3x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+\frac{3z^2}{2}=\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Нерівність доведено.

Задача 4. Нехай для трьох додатних чисел a,b,c має місце співвідношення $abc=1$. Довести, що $\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\ge1$.

Щоб застосувати до даної задачі твердження про $(n-1)$ рівних значень зробимо заміни $a=e^x, b=e^y, c=e^z$, тоді легко переконатися, що $x+y+z=0$ і отримаємо нерівність

$$\frac{e^x}{e^x+2}+\frac{e^y}{e^y+2}+\frac{e^z}{e^z+2}\ge1.$$

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$, для неї $f'(x)=\frac{2e^x}{\left(e^x+2\right)^2}$ та $f''(x)=\frac{2e^x\left(e^x-2\right)}{\left(e^x+2\right)^3}$. Легко встановити наявність лише однієї точки перегину у нашої функції. Тоді за твердженням про $(n-1)$ рівних значень слід розглянути функцію

$$g(x)=2f(x)+f(-2x)=\frac{2e^x}{e^x+2}+\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+2}.$$

Тепер можна застосувати відомий із шкільного курсу аналізу алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції. Виконавши перетворення нескладно отримати

$$g'(x)=\frac{4\left(4e^x-1\right)\left(e^{3x}-1\right)}{e^{3x}\left(e^x+2\right)^2\left(e^{-2x}+2\right)^2},$$

звідки її нулі рівні 0 та $\ln\frac{1}{4}$, причому на множині $x\in\left(-\infty;\ln\frac{1}{4}\right)\cup(0;\infty)$ функція $g(x)$ зростає, а при $x\in\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$ – спадає, тому в $x_1=0$ буде мінімум, а в $\ln\frac{1}{4}$ – максимум. Дослідивши поведінку функції при $x\to-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$ з урахуванням проміжків зростання та спадання отримаємо, що найменше значення функції $g(x)$ є рівним значенню $g(0)=1$.

Тому

$$\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=\frac{e^x}{e^x+2}+\frac{e^y}{e^y+2}+\frac{e^z}{e^z+2}\ge g(0)=1$$

Нерівність доведено.

Зауважимо, що другий метод є в деякому розумінні грубим, оскільки він передбачає досить багато обчислень, які досить часто можуть бути громіздкими, але його перевагою є чітка алгоритмічна схема знаходження найбільших та найменших значень функції на відрізку.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок напряму. Доведення конкурсних та олімпіадних нерівностей учнями і студентами є гарним підґрунтям та підготовкою до майбутньої наукової діяльності. Подальші дослідження можна спрямувати на доведення цих та аналогічних нерівностей іншими способами, зокрема, за допомогою класичних нерівностей тощо. Статтю можна рекомендувати вчителям математики, студентам фізико-математичних факультетів та усім, хто займається математичною підготовкою обдарованих школярів до участі в олімпіадах та математичних турнірах.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Київські міські математичні олімпіади. 2003–2011 роки /А.В. Анікушин та ін. за ред. Б.В.Рубльова. Харків: Гімназія, 2011. 192с.
2. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. Харків: Вид. група «Основа», 2008. 255 с.
3. Математичні олімпіади школярів України: 2001-2006. / Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Львів: Каменяр, 2008. 348 с. / URL: https://www.twirpx.com/file/2049208/ (дата звернення 20.05.2020)
4. Ясінський В.А., Панасенко О.Б. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та міжнародних олімпіад. Алгебра. Навчально-методичний посібник. Вінниця: Середняк Т.К., 2015. 272 с.
5. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль: Навчальна книга, Богдан, 2008. 208 с.
6. Сарана О.О. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. Тернопіль: Навчальна книга. Богдан, 2011. 400 с.
7. Федак І.В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. Чернівці.: Зелена Буковина. 2002. 340 с.
8. Харди Г.Г., Литлвуд Дж.Е., Пойа Г. Неравенства.

М.: ИЛ, 1948. 458 с.

9. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.

10. Evan Chen. A Brief Introduction to Olympiad Inequalities. URL: https://web.evanchen.cc/handouts/Ineq/en.pdf (дата звернення 20.05.2020)

REFERENCES

1. Anikushyn, A.V. ets (2011) *Kyivski miski matematychni olimpiady. 2003–2011 roky* [Kyiv City Mathematical Olympiads. 2003–2011] Kharkiv.

2. Voronyi, O.M. (2008) *Hotuiemos do olimpiady z matematyky*. [We are preparing for the Olympiad in mathematics]. Kharkiv.

3. Leifura, V.M., Mitelman, I.M., Radchenko, V.M., Yasinskyi, V.A. (2008) *Matematychni olimpiady shkoliariv Ukrainy: 2001-2006*. [Mathematical Olympiads of schoolchildren of Ukraine: 2001-2006]. Lviv.

4. Yasinskyi, V.A., Panasenko, O.B. (2015) *Sekrety pidhotovky shkoliariv do Vseukrainskykh ta mizhnarodnykh olimpiad. Alhebra.* [Secrets of preparing students for All-Ukrainian and international competitions. Algebra]. Vinnytsia.

5. Yasinskyi, V.A. (2008) *Zadachi matematychnykh olimpiad ta metody yikh rozviazuvannia.* [Problems of mathematical competitions and methods of their solution]. Ternopil.

6. Sarana, O.O. (2011) *Matematychni olimpiady: proste i skladne poruch* [Mathematical Olympiads: simple and complex side by side]. Ternopil.

7. Fedak, I.V. (2002) *Metody rozviazuvannia olimpiadnykh zavdan z matematyky i ne tilky yikh*. [Methods for solving Olympiad problems in mathematics and not only them]. Chernivtsi.

8. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G. (1948) *Neravenstva* [Inequalities]. Moscow.

9. Beckenbach, E. F., Bellman, R. (1965) *Neravenstva* Inequalities. Moscow.

10. Chen, Evan. *A Brief Introduction to Olympiad Inequalities*.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ГАЄВСЬКИЙ Микола Вікторович – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: функціональний аналіз, теорія апроксимації, особливості роботи з обдарованими дітьми, олімпіадні задачі.

ІЗЮМЧЕНКО Людмила Володимирівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: особливості роботи з обдарованими дітьми, олімпіадні задачі, методика навчання математики, проблеми організації самостійної роботи студентів та школярів, ЗНО.

КЛЮЧНИК Інна Геннадіївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: особливості роботи з обдарованими дітьми, олімпіадні задачі, задачі з параметром, ЗНО, асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

HAIEVSKYI Mykola – candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer of Department of Physics and Mathematics at the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of scientific interests: functional analysis, approximation theory, specific aspects of work with gifted pupils, olympiad tasks.

IZIUMCHENKO Liudmyla – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of Department of Physics and Mathematics at the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of scientific interests: specific aspects of work with gifted pupils, competition problems, methods of teaching mathematics, organization problems of independent work of students and pupils, EIT.

KLIYCHNYK Inna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of Department of Physics and Mathematics at the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of scientific interests: specific aspects of work with gifted pupils, competition problems, methods of teaching mathematics, organization problems of independent work of students and pupils, EIT.

Стаття надійшла до редакції 22.09.2020 р