інформаційних систем Інституту інформаційних технологій і засобів навчання Національної академії педагогічних наук України.

Наукові інтереси: електронна бібліотека, інформацій

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

IVANOVA Svitlana Mykolaivna – candidate of pedagogical sciences, Head of the Department of Open Education and Scientific Information Systems Institute of Information Technologies and Learning Tools of National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine.

***Circle of research interests*:** pedagogy, information and communications technology in education, digital library, open electronic scientific and educational system.

NOVYTSKA Tetiana Leonydivna – researcher of the Department of Open Education and Scientific Information Systems Institute of Information Technologies and Learning Tools of National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine.

***Circle of research interests*:** digital library, information and communications technology in education.

Стаття надійшла до редакції 17.11.2019 р.

УДК 372.851
DOI: 10.36550/2415-7988-2019-1-183-95-98

ІЗЮМЧЕНКО Людмила Володимирівна –
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID:https://orcid.org/0000-0001-8656-2220
e-mail: l.iziumch@gmail.com
ГАЄВСЬКИЙ Микола Вікторович –
кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID:https://orcid.org/0000-0001-5268-748X
e-mail: mgaevskij@gmail.com

ЗАЛУЧЕННЯ УЧНІВ ДО НАУКОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ (НА ПРИКЛАДІ ПІДГОТОВКИ КОМАНД ДО УЧАСТІ В ОЛІМПІАДАХ ТА ТУРНІРАХ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ)

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Під нестандартними задачами розуміють такі задачі, для розв’язування яких немає готової схеми дій, такі задачі не можна розв’язати відомими способами; конкурсні задачі дозволяють навчити учнів розмірковувати, критично мислити, знаходити правильне розв’язання проблеми, застосовувати знання на практиці, переносити відомі йому способи дій в нові для нього ситуації й відкривати нові способи діяльності. Створення у процесі навчання проблемних ситуацій і розгортання на їх основі активної пошукової діяльності учнів дає можливість формування в школярів стійкого пізнавального інтересу до предмету, зокрема математики, сприяє самореалізації, саморозвитку учнів, становленню особистості, здатної без сторонньої допомоги оволодівати знаннями і способами діяльності, розв’язувати пізнавальні задачі.

Розв’язування олімпіадних задач учнями та студентами є гарним підґрунтям та підготовкою до майбутньої наукової діяльності, оскільки засвоєння методів розв’язування олімпіадних задач вимагає від них напруженої, активної та зосередженої самостійної роботи, а також розвиває їхню творчість, креативність та піднімає рівень зацікавленості до математики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Учені, педагоги-практики приділяють значну увагу різним аспектам процесу математичної підготовки обдарованих учнів до участі у математичних олімпіадах, конкурсах, турнірах, активної пошукової роботи у системі Малої академії наук України. Формування творчої особистості школяра, розвиток творчого мислення учня, наступність у процесі навчання математики досліджували Бевз Г.П., Бурда М.І., Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я., Скафа О.І., Тарасенкова Н.А., Хмара Т.М., Чашечникова О.С., Швець В.О. та ін. Системний підхід в організації розв’язування нестандартних та олімпіадних задач досліджували Анікушин А.В., Борисова В.О., Вишенський В.А., Вороний О.М., Ганюшкін О.Г., Добосевич М.С., Карташов М.В., Клурман О.О., Кукуш О.Г., Курченко О.О., Лейфура В.М., Михайловський В.І., Мітельман І.М., Нагорний В.Н., Некрашевич В.В., Панасенко О.Б., Плахотник В.В., Рабець К.В., Радченко В.М., Рубльов Б.В., Федак І.В., Шунда Н.М., Ясінський В.А. та ін. [1; 3; 5; 6].

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених роботі з обдарованими учнями, підготовка школярів до участі у математичних турнірах висвітлена недостатньо та потребує подальшого дослідження.

Метою статті є розкриття математичних аспектів підготовки учнів до розв’язування конкурсних завдань на прикладі однієї задачі (доведення нерівності та її узагальнення), запропонованої на XXII Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й. Ядренка

(2019 р.). Завдання: до даної задачі навести декілька різних способів її доведення; проаналізувати можливості доведення іншими способами, їхні переваги та недоліки; провести порівняння з точки зору вікових можливостей дослідників; визначити оптимальний спосіб доведення з позиції знань школярів; провести паралель між олімпіадною задачею і даною нерівністю та показати, як з використанням результатів цієї задачі можна довести дану нерівність.

Для реалізації поставленої мети та виконання завдань статті використано теоретичні (аналіз першоджерел з проблеми дослідження, синтез, порівняння) та емпіричні (педагогічне спостереження, аналіз навчального процесу) методи дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. Одним із важливих типів олімпіадних задач є нерівності. Існує багато різних способів доведення нерівностей: аналітичний та синтетичний методи, доведення нерівностей методом від супротивного, нерівностей методом мажорування, за допомогою методу математичної індукції, застосування класичних нерівностей (Коші, Гельдера, Мінковського, Юнга, Ієнсена, транснерівностей тощо), використання методів математичного аналізу, геометрії, векторної алгебри тощо. Тематика нерівностей є хорошим засобом для навчання типовим методам наукових досліджень, що включають в себе такі види діяльності як повний перебір варіантів, перехід від часткового до загального тощо, при роботі з нерівностями слід не лише вміти виконувати певні міркування в межах певної схеми, але також і розуміти мету цих дій. Не існує єдиного методу розв’язання олімпіадних задач, кількість нових методів та підходів до розв’язування та доведення нерівностей постійно зростає, з’являються нові нерівності та методи їх розв’язання. Тут як приклад можна навести монгольську нерівність та огляд і хронологію різних методів її доведення [4].

Як говорив Д. Пойа, краще розв’язати одну задачу кількома способами, ніж багато задач одним. У цьому плані нерівності не є виняток. Більшість нерівностей доводяться кількома різними методами або їх комбінацією. Крім того, основною їх особливістю є те, що розв’язання на перший погляд простої задачі може вимагати побудови досить серйозних математичних досліджень, а сама задача може мати досить цікаве узагальнення із непростим обґрунтуванням. Головним позитивом цього є те, що розв’язування задач різними способами залучає учнів до пошукової діяльності, створюючи умови для розвитку їх мислення, допомагає структуризувати та систематизувати дані, опанувати різними математичними відношеннями та поняттями, будувати математичні моделі, аналізувати і досліджувати їх.

Також слід відмітити, що поява нових нерівностей та методів їх доведення приводить до того, що застосування більшості відомих нерівностей (Коші, Гельдера, Мінковського, Юнга, Ієнсена, транснерівностей) не є очевидним і досить часто вимагає інших методів.

У даній роботі розглянемо різні способи доведення нерівностей. Як приклад розглянемо нерівності, що були запропоновані командам учасницям XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка у 2019 році.

Задача. Для всіх натуральних чисел n довести нерівності:

1) $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\le\frac{9n^2}{8}$;

2) $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+k-1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{k+1}\right)\le\frac{9n^4}{8}$.

Доведемо першу нерівність декількома способами. Найбільш елементарне доведення нерівності, що базується на матеріалі середньої школи є наступним.

Запишемо кожну суму в наступному вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

та

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=n-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=n+1-\frac{1}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Тоді нашу нерівність можемо записати у наступному вигляді:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)=\left(n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\cdot\left(n+1-\frac{1}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\le$$

$$\le\left(n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\cdot\left(n+1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=(n+1)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2\le(n+1)^2-1=n^2+2n.$$

Як бачимо, функція $f(x)=\frac{9x^2}{8}$ зростає швидше за функцію $f(x)=x^2+2x$, тому починаючи з деякого $x>0$ буде справедлива нерівність $x^2+2x\le\frac{9x^2}{8}$.

Знайдемо таке значення $x>0$:

$$x^2+2x\le\frac{9x^2}{8}\Rightarrow\frac{9x^2}{8}-x^2-2x\ge0\Rightarrow\frac{x^2}{8}-2x\ge0\Rightarrow x\ge16,$$

отже, при $n\ge16$ нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\le\frac{9n^2}{8}$$

справедлива. У цьому випадку відмітимо, що справедлива навіть більш точна нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\le(n+1)^2\le\frac{9n^2}{8}.$$

Для номерів $n=1,2,3,\ldots,15$ справедливість нерівності $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\le\frac{9n^2}{8}$ можна перевірити безпосереднім обрахунком.

Як бачимо, недоліком цього елементарного методу є необхідність проводити безпосередні обчислення для деяких номерів ($n=1,2,3,\ldots,15$), проте за його допомогою можна уточнити нерівність.

Розглянемо інше доведення нерівності, що базується на більш тонких методах – а саме використання методу Штурма [2].

Розглянемо поведінку суми $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $0<a\le x,y\le b$ при наближенні чисел x,y, вважаючи їх суму $x+y$ сталою. За цих умов їхній добуток $x\cdot y$ буде зростати, а тому $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ і сума $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при наближенні чисел буде спадати. На основі таких міркувань, доводиться таке твердження:

Нехай числа $0<a\le x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\le b$. Довести, що

$$\left(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\le\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2$$

Дана задача була запропонована на 12-ій Всесоюзній математичній олімпіаді.

З використанням цього твердження доведення нашої нерівності є майже елементарним.

Помітимо, що $1\le\frac{k+1}{k}=1+\frac{1}{k}\le 2\Rightarrow a=1,b=2$, тому

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\le\frac{(1+2)^2}{4\cdot1\cdot2}n^2=\frac{9n^2}{8}.$$

Доведемо першу нерівність з використанням методу математичної індукції. Позначимо для скорочення запису через $S(n)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)$

Нехай $n=1$, тоді маємо $S(1)=-\frac{1+1}{1}\cdot\frac{1}{1+1}\le\frac{9}{8}$.

Нехай нерівність має місце і при деякому $k=n$, тобто виконується

$$S(n)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\le\frac{9n^2}{8}.$$

Отже, слід перевірити справедливість цієї нерівності і при $k=n+1$ $S(n+1)\le\frac{9(n+1)^2}{8}=\frac{9n^2}{8}+\frac{9n}{4}+\frac{9}{8}$.

$$S(n+1)=\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{k+1}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}+\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}+\frac{n+1}{n+2}\right)=$$

$$=S(n)+\frac{n+1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}+\frac{n+2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}+1\le$$

$$\le\frac{9n^2}{8}+1+\frac{n+1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}+\frac{n+2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}.$$

Доведемо допоміжну нерівність:

$$\frac{n+1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}+\frac{n+2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\le\frac{9n}{4}+\frac{1}{8}.$$

Зробивши перетворення, отримаємо

$$\frac{n+1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})+\frac{n+2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{k+1})=$$

$$=\frac{n(n+1)}{n+2}+\frac{n+1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{n(n+2)}{n+1}-\frac{n+2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=$$

$$=n\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}+\frac{n+2}{n+1}\right)+\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+2}{(n+1)^2}-\left(\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le$$

$$\le 2n+\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+2}{(n+1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)=$$

$$=2n+\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+2}{(n+1)^2}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\le 2n+\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+2}{(n+1)^2}-\frac{2n+2}{2(n+1)(n+2)}=$$

$$=2n+\frac{n}{n+2}-\frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

Перевірка показує, що при $n=1$ допоміжна нерівність справедлива, а при $n\ge2$ завжди буде виконуватися $\frac{n}{n+2}-\frac{n+2}{(n+1)^2}\le\frac{n}{4}+\frac{1}{8}$.

Тому використавши допоміжну нерівність отримаємо:

$$S(n+1)\le\frac{9n^2}{8}+1+2n+\frac{n}{4}+\frac{1}{8}=\frac{9n^2}{8}+\frac{9n}{4}+\frac{9}{8}=\frac{9(n+1)^2}{8}.$$

Доведемо другу нерівність (для всіх натуральних чисел n довести нерівність):

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+k-1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{k+1}\right)\le\frac{9n^4}{8}.$$

Міркуючи аналогічно попередньому випадку, розглянемо суми

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+k-1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(2k+1-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=n^2+2n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

та

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}(2k-3)+3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}(2k-3)+3\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=n^2-2n+3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Тоді

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+k-1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{k+1}\right)=\left(n^2+2n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\cdot\left(n^2-2n+3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

Нескладно помітити, що при $n\ge9$ матимемо $3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<n$, це можна перевірити безпосередніми підрахунками або для цього можна використати відомий факт, встановлений ще Л. Ойлером, що частинні суми гармонічного ряду $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ зростають зі швидкістю $\ln n$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$, де $\gamma\approx0{,}5772$ – стала Ойлера-Маскероні, ε_n із зростанням n спадає до нуля.

Тоді при матимемо $n\ge9$ нерівність:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+k-1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{k+1}\right)\le\left(n^2+2n\right)\cdot\left(n^2-n\right)=$$

$$=n^2\left(n+2\right)\left(n-1\right)=n^2\left(n^2+n-2\right).$$

Розглянемо тепер нерівність:

$$n^2\left(n^2+n-2\right)\le\frac{9n^4}{8}\Leftrightarrow n^2+n-2\le\frac{9n^2}{8},\text{ або}$$

$\frac{n^2}{8}-n+2\ge0$, при $n\ge9$ завжди справедлива.

Отже, нерівність при $n\ge9$ $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+k-1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{k+1}\right)\le\frac{9n^4}{8}$ є справедливою, для $n=1,2,3,\dots,8$ її справедливість перевіряється безпосередніми обчисленнями.

Також другу нерівність можна довести з використанням методу математичної індукції. Доведення в силу його громіздкості опустимо.

Як бачимо, кожну нерівність можна довести різними методами, кожен з яких має свої переваги та недоліки. Самим простим у нашому випадку було використання елементарних фактів шкільного курсу і при цьому ми навіть починаючи з деякого номера мали навіть точнішу нерівність, проте недоліком є перевірка нерівності на деякій множині номерів. Більш точно оцінюючи частинні суми $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ можна звузити множину номерів, на якій слід перевіряти справедливість нерівності. Метод Штурма не входить до обов'язкової програми шкільного курсу і для знайомства з ним учням та студентам слід самостійно опрацювати матеріал. Метод математичної індукції входить до програми профільного та поглибленого рівня, але недоліком цього методу отримання нових нерівностей, доведення яких не завжди елементарне.

Висновки та перспективи подальших розвідок напряму. Розв'язування конкурсних та олімпіадних задач учнями і студентами є гарним підґрунтям та підготовкою до майбутньої наукової діяльності. На відміну від традиційних олімпіад турнір юних математиків – це колективне змагання, яке дає можливості школярам успішно проводити науковий пошук та ознайомитися з різноплановою математичною літературою під керівництвом тренерів. Турнірні задачі передбачають необхідність наукового дослідження; результат залежить від глибини розуміння проблеми, певних обмежень та додаткових умов, часто такі дослідження передбачають можливість узагальнити проблему.

Подальші дослідження будуть спрямовані на доведення цієї нерівності іншими способами за допомогою класичних нерівностей; уточненні даних доведень та можливому узагальненні цієї нерівності. Статтю рекомендуємо вчителям математики, студентам фізико-математичних факультетів та усім, хто займається математичною підготовкою обдарованих школярів до участі в олімпіадах та математичних турнірах.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Київські міські математичні олімпіади. 2003–2011 роки /А.В. Анікушин, О.О. Клурман, Г.В. Крюкова та ін. за ред. Б.В. Рубльова. – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.

2. Курляндчик Л. Приближение к екстремуму / Л. Курляндчик // Квант, №1, 1981. С.21-25. – URL: http://kvant.mccme.ru/1981/01/p21.htm (дата звернення 08.11.2019)

3. Лейфура В.М. Математичні олімпіади школярів України: 2001-2006 / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський – Львів: Каменяр, 2008. – 348 с. – URL: https://www.twirpx.com/file/2049208/ (дата звернення 08.11.2019)

4. Храбров А. И. Вокруг монгольского неравенства / А.И. Храбров // Математическое просвещение. сер. 3 – №7 – Москва: МЦНМО, 2003. – С. 149-162.

5. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В.А. Ясінський – Тернопіль: Навчальна книга, Богдан, 2008. – 208 с.

6. Ясінський В.А., Панасенко О.Б. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та міжнародних олімпіад. Алгебра. Навчально-методичний посібник. / В.А. Ясінський, О.Б. Панасенко – Вінниця: Середняк Т.К., 2015. – 272 с.

REFERENCES

1. Anikushyn, A.V. and Klurman, O.O. and Kriukova, H.V. and Rublov, B.V. (2011) *Kyivski miski matematychni olimpiady. 2003–2011 roky*. [Kyiv City Mathematical Olympiads. 2003-2011]. Kharkiv.

2. Kurliandchyk L. (1981) *Pryblyzhenye k ekstremumu.*[Approaching the extreme] URL: http://kvant.mccme.ru/1981/01/p21.htm (accessed 08.11.2019).

3. Leifura, V.M. and Mitelman, I.M. and Radchenko, V.M. and Yasinskyi, V.A. (2008) *Matematychni olimpiady shkoliariv Ukrainy: 2001-2006*. [Mathematical Olympiads of Schoolchildren of Ukraine: 2001-2006].URL: https://www.twirpx.com/file/2049208/ (accessed 08.11.2019).

4. Khrabrov, A.Y. (2003) *Vokruh monholskoho neravenstva.* [Around the Mongolian inequality]. Moscow.

5. Yasinskyi, V.A. (2008) *Zadachi matematychnykh olimpiad ta metody yikh rozviazuvannia.*[Mathematical Olympiad Problems and Methods of Solving It]. Ternopil.

6. Yasinskyi, V.A. and Panasenko, O.B. (2015) *Sekrety pidhotovky shkoliariv do Vseukrainskykh ta mizhnarodnykh olimpiad.* [Secrets of preparing students for All-Ukrainian and International Olympiads]. Vinnytsia.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ІЗЮМЧЕНКО *Людмила Володимирівна* – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: особливості роботи з обдарованими дітьми, олімпіадні задачі, методика навчання математики, проблеми організації самостійної роботи студентів та школярів, ЗНО.

ГАЄВСЬКИЙ *Микола Вікторович* – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: функціональний аналіз, теорія апроксимації, особливості роботи з обдарованими дітьми, олімпіадні задачі.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

IZIUMCHENKO *Liudmyla Volodymyrivna* – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of Department of Physics and Mathematicsat the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

***Circle of research interests*:** specific aspects of work with gifted pupils, competition problems, methods of teaching mathematics, organization problems of independent work of students and pupils, EIT.

HAIEVSKYI *Mykola Viktorovych* – candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer of Department of Physics and Mathematicsat the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

***Circle of research interests*:** functional analysis, approximation theory, specific aspects of work with gifted pupils, olympiad tasks.

Стаття надійшла до редакції 11.11.2019 р.