УДК 519.2
DOI: 10.36550/2415-7988-2019-1-183-10-13

ВОЛКОВ Юрій Іванович –
доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2270-3407
e-mail: yulysenko@i.ua
ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна –
кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0523-7889
e-mail: vojnalovichn@gmail.com

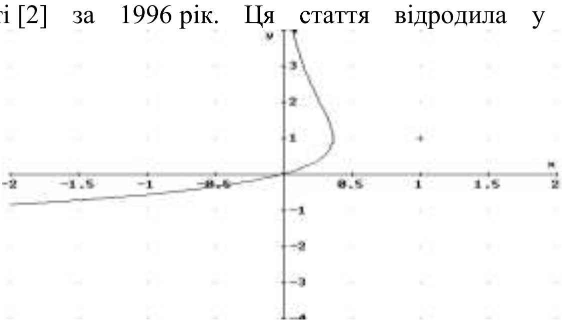
ФУНКЦІЯ ДЕРЕВА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

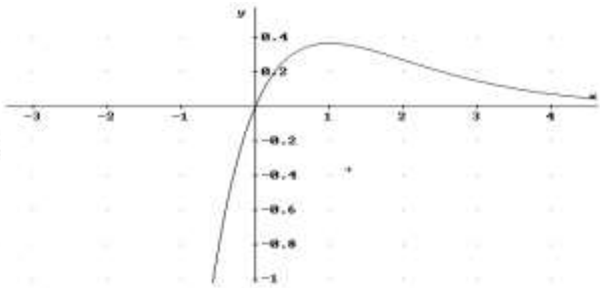
Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Функція $x=T(y)$ називається функцією дерева, якщо вона є оберненою до функції $y = xe^{-x}$. Це один з важливих прикладів неелементарної функції, якій в україномовній літературі практично не приділяється уваги. А через те, що ця функція широко використовується в комбінаториці і теорії ймовірностей, виникає проблема познайомити майбутніх вчителів математики з функцією дерева.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Функція дерева і пов'язана з нею функція Ламберта $W(x)=-T(-x)$ почала вивчатися ще Ейлером [1]. Про історію появи цих функцій можна прочитати в статті [2] за 1996 рік. Ця стаття відродила у дослідників інтерес до функцій Ламберта і функції дерева. З'явився ряд публікацій на цю тему. Відмітимо серед них лише публікації [3] і [4].

Мета статті – продемонструвати методику отримання степеневих рядів для функції дерева і ряду функцій, які виражаються через функцію дерева. Вивчити ймовірнісні розподіли, які породжені отриманими рядами.

Виклад основного матеріалу дослідження. Графіки функцій xe^{-x} і $T(x)$ такі: (для $T(x)$ береться вітка, яка визначена на проміжку $(-\infty, e^{-1})$).





Функція дерев пов'язана з функцією Ламберта W(вона є оберненою до функції $y = xe^{x}$) $W(x)=-T(-y)$ або $T(y)=-W(-y)$. Для отримання значень функції дерева можна використовувати математичні пакети Mathematica (це функція ProductLog[z]) іMaple (це функція LambertW(x)).

1. Розклад функції дерев у степеневий ряд

При виконанні дій над многочленами і рядами корисною є операція знаходження коефіцієнта ряду, яка визначається так.

Нехай $f(z)=\sum_{m\in Z} a_m z^m$. Тоді $[z^k]f(z):=a_k$.

Наприклад, $[z^3](3-5z+4z^2-2z^3+z^5)=-2$, $[z^5]\exp z=\frac{1}{5!}$, $[z^{-1}]\frac{\sin z}{z^4}=-\frac{1}{3!}$.

Відмітимо такі властивості операції [z^k]:

1. $\forall k.n\in Z$ $[z^{-k}]f(z)=[z^{n-k}](z^n f(z)$.

Дійсно, $[z^{-k}]f(z)=a_{-k}$, а

$$[z^{n-k}](z^n f(z)=[z^{n-k}]\sum_{m\in Z} a_m z^{m+n}=a_{n-k-n}=a_{-k}.$$

2. $[z^{-1}]f'(z)=0$.Дійсно, якщо

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1 z+\cdots,\text{ то}$$

$$f'(z)=\cdots-2\frac{a_{-2}}{z^3}-\frac{a_{-1}}{z^2}+a_1+2a_2 z+\cdots$$

Візьмемо функцію f, яку можна розкласти в ряд Лорана по степеням z. Нехай $z(y)=T(y)$ і $g(z)=ze^{-z}$. Розкладемо в ряд функцію $f(z(y))$, тобто знайдемо коефіцієнти цього ряду, які позначимо через c_m. Тоді матимемо

$f(z(y)) = \sum_{m\in Z} c_m y^m$, або $f(z) = \sum_{m\in Z} c_m g(z)^m$.

$f'(z) = \sum_{m\in Z} mc_m g(z)^{m-1} g'(z)$, а звідси $\forall n \in Z$

$$\frac{f'(z)}{g(z)^n} = \sum_{m\in Z} mc_m g(z)^{m-n-1} g'(z) =$$
$$= \sum_{m\in Z, m\neq n} mc_m \frac{d}{dz} g(z)^{m-n} \frac{1}{m-n} + nc_n \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Звідси

$$[z^{-1}]\frac{f'(z)}{g(z)^n} = 0 + nc_n [z^{-1}]\frac{g'(z)}{g(z)} = nc_n [z^{-1}]\frac{1-z}{z} = nc_n.$$

Отже, $[z^{-1}]\frac{f'(z)}{g(z)^n} = nc_n = n[z^n]f(z(y))$, а в силу властивості 1 операції $[z^n]$ матимемо

$$[z^{-1}]\frac{f'(z)}{g(z)^n} = [z^{n-1}]f'(z)\left(\frac{z}{g(z)}\right)^n.$$

І, отже, остаточно

$$n[z^n]f(z(y)) = [z^{n-1}]f'(z)\exp(nz).$$

Мовою рядів це означає, що має місце розклад

$$f(z(y)) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^n}\left(f'(z)\exp(nz)\right)|_{z=0}. \quad (1.1).$$

Зокрема, якщо $f(z) = z$, то матимемо

$$z(y) = T(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^n}\exp(nz)|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n n^{n-1}}{n!}$$

$$T(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}n^{n-1}y^n = y + \frac{2}{2!}y^2 + \frac{3^2}{3!}y^3 + \dots + \frac{n^{n-1}}{n!}n^n + \dots \quad (1.2)$$

Примітка: термін функція дерева походить з теорії графів, її використовують для підрахунку кількості дерев з k вершинами з ярликами (кількість таких дерев дорівнює числу k^{k-1}).

Радіус збіжності ряду (1)

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k-1}\frac{1}{k+1} = e^{-1}.$$

2. Розклад у степеневий ряд деяких функцій, які виражаються через функцію дерев

Скористаємось формулою (1) для побудови степеневого ряду функції $(T(y))^k$, в цьому випадку $f(z) = z^k, k \geq 1$.

Шукаємо коефіцієнти

$b_n = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}(e^{nt}nt^{n-1})|_{t=0}$. Для цього застосуємо формулу Лейбніца для похідної m-го порядку:від добутку двох функцій:

$$\frac{d^m}{da^m}e^{(m+1)t}t^n|_{t=0} = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{j}(t^n)^{(i)}(e^{(m+1)t})^{(m-i)}|_{t=0} = \binom{m}{n}n!(m+1)^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!}(m+1)^{m-n}.$$

Повертаючись до старих змінних, остаточно отримаємо: $b_n = \frac{kn^{n-k-1}}{(n-k)!}$.

$$(T(y))^k = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{kn^{n-k-1}}{(n-k)!}y^n = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{kn^{n-1}}{(n-k)!\,n^k}y^n =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}y^n\frac{n!\,k}{(n-k)!\,n^k}$$

(2.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(T(y))^k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}y^n\sum_{k=1}^{n}ka_k\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}. \quad (2.2)$$

Далі будемо використовувати похідну від функції дерев. Продиференціюємо тотожність $T(y)e^{-T(y)} = y$ по у. Матимемо $T'(y)e^{-T(y)} - T(y)e^{-T(y)}T'(y) = 1$. Звідси

$$T'(y) = \frac{e^{T(y)}}{(1-T(y)} = \frac{T(y)}{y(1-T(y)} \quad (2.3)$$

з іншого боку з формули (2) виливає:

$$T'(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}n^n y^{n-1},$$ а звідси

$$\frac{T(y)}{1-T(y)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}n^n y^n \quad (2.4)$$

$$1 + yT(y) = \frac{1}{1-T(y)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}n^n y^n \quad (2.5)$$

Скористаємось позначенням $T = T(y)$ і сумою геометричного ряду $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$.

Матимемо, враховуючи (2.3),

$$\frac{T}{1-T} = T + T^2 + \dots + T^k + \dots =$$
$$= \sum_{n\geq 1}\frac{n^{n-1}}{n!}y^n\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}n^n y^n.$$

(2.6)

Звідси, порівнюючи коефіцієнти при y^n, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = n,$$ або

$$1 + 2\frac{n-1}{n} + 3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + 3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \dots = n$$

Знайдемо розклад у степеневий ряд функції $\log\frac{1}{1-T(y)}$ по степеням *y*. Матимемо, скориставшись співвідношенням (2.2),

$$\log\frac{1}{1-T(y)} = T(y)+\frac{1}{2}T^2(y)+\frac{1}{3}T^3(y)+\frac{1}{4}T^4(y)+\cdots =$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{n^{n-1}y^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \sum_{n\ge1}\frac{n^{n-1}Q(n)}{n!}y^n.\ ,(2.7)$$

В цій формулі

$$Q(n):=1+\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^{32}}\ldots(2.8)$$

відома функція Рамануджана ([1, с. 338])

Якщо продиференціювати співвідношення (2.7) по *y*, то матимемо

$$\frac{d}{dy}\log\frac{1}{1-T(y)} = \frac{T(y)}{(1-T(y))^2} = \sum_{n\ge1}\frac{n^nQ(n)}{n!}y^n.$$

З іншого боку, враховуючи (2.2),

$$\frac{T(y)}{(1-T(y))^2} = T(y)+2T^2(y)+3T^3(y)+4T^4(y)\cdots =$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{n^{n-1}y^n}{n!}(1+2^2\,\frac{n-1}{n}+3^2\,\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+$$

$$+3^2\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}\cdots).$$

Порівнюючи два останніх вирази, отримаємо тотожність

$$1+2^2\,\frac{n-1}{n}+3^2\,\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+$$

$$+3^2\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}+\cdots = nQ(n).$$

Подібними міркуваннями, можна отримати і такі співвідношення:

$$\frac{d^2}{dy^2}\log\frac{1}{1-T(y)} = \frac{T(y)(1+T(y)}{(1-T(y))^4} = \sum_{n\ge1}\frac{n^{n+1}Q(n)}{n!}y^n.$$

$$\frac{T(y)(1+T(y)}{(1-T(y))^4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)T^k(y) =$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{n^{n-1}y^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\ \frac{1}{6}k^2(k+1)(2k+1)\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}$$

Порівнюючи два останніх вирази, отримаємо тотожність

$$\sum_{k=1}^{n}\ \frac{1}{6}k^2(k+1)(2k+1)\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = n^2Q(n).$$

3. Многочлени дерева

Означення. *Нехай*

$$\frac{T^r(y)}{(1-T(y))^s} = \sum_{n\ge1}\frac{t_n(r,s)}{n!}y^n. \qquad (3.1)$$

многочлени $t_n(r,s)$ *називаються узагальненими многочленами дерева.*

Зокрема, $t_n(s):=t_n(0,s)$ це відомі многочлени дерева ([1],стор.336).

Знайдемо многочлени $t_n(r,s)$. Для цього розкладемо в степеневий ряд функцію у лівій частині співвідношення (3.1) по степеням *T* і скористаємось формулою (2.2). Матимемо

$$\frac{T^r(y)}{(1-T(y))^s} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+s-1}{k}T^{k+r} = \sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-r+s-1}{k-r}T^k = \sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-r+s-1}{s-1}T^k =$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{n^{n-1}}{n!}y^n\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k-r+s-1}{s-1}\frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при y^n в цьому виразі і виразі (9), отримаємо

$$t_n(r,s) = n^{n-1}\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k-r+s-1}{s-1}\frac{n!}{(n-k)!n^k}. \quad (3.2)$$

Зокрема, для звичайних многочленів дерева отримаємо відому формулу з [3, с. 339].

Наслідок 1.

$$t_n(s) = t_n(0,s) = n^{n-1}\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k+s-1}{s-1}\frac{n!}{(n-k)!n^k}$$

Наслідок 2. $t_n(1,1) = n^{n-1}\sum_{k=r}^{\infty}k\,\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = n^n$

Наслідок 3. $rt_n(r,s+2)+(s-r)t_n(r+1,s+2) = nt_n(r,s)$..

4. Розподіли степеневих рядів

Характерною особливістю рядів, які отримані вище, є те, що коефіцієнти цих рядів невід’ємні, а це дозволяє будувати арифметичні розподіли, які називаються розподілами степеневих рядів. Наведемо основні факти, які стосуються таких розподілів.

Нехай

$$w(y) = \sum_k a_k y^k,\ a_k \ge 0, 0 < y < R, \qquad (4.1)$$

Визначимо статистичну структуру з параметром *y*

$$p_k(y) := \frac{y^k a_k}{w(y)}, k = 0,1,\ldots \qquad (4.2)$$

Означення. *Розподіл випадкової величини ξ, заданий формулою* (4.2), *називається розподілом степеневого ряду* (4.1).

Тому

$$M\xi = \frac{w'(y)/w(y)}{1/y} = \frac{yw'(y)}{w(y)},$$

$$D\xi = \frac{1}{s'(y)}\cdot\frac{dM\xi}{dy} = y\frac{dM\xi}{dy}.$$

Введемо другу параметризацію (середнім) за формулою $x = M\xi = y\frac{w'(y)}{w(y)}$.

Подивимося як зміняться попередні формули з такою параметризацією. На проміжку (0, *R*) функція *x*=*x*(*y*) має обернену, бо вона зростає. Справді, $D\xi = y\frac{dM\xi}{dy} \ge 0, y > 0$, а тому $\frac{dx}{dy} = \frac{dM\xi}{dy} > 0.$ Позначимо її через *y*(*x*). Тоді

$$p(k,x) := p_k(y(x)) = \frac{(y(x))^k a_k}{w(y(x))}, k = 0,1,\ldots$$

$$x \in X = \left(0, \frac{Rw'(R)}{w(R)}\right),$$

$D\xi = \dfrac{y}{dy/dx} = \dfrac{y(x)}{y'(x)}$. Далі дисперсію позначатимемо так: $D\xi = v(x)$.

Функцію $v(x)$ називатимемо *дисперсійною характеристикою* розподілу. Знайдемо таку характеристику для розподілу, породженого рядом функції дерева. Матимемо

$$p_0 = 0, p_k = P(\xi = k) = \frac{y^k k^{k-1}}{k!\,T(y)}, k = 1,2,\ldots, 0 \le y \le 1/e.$$

$$T(y) = ye^{T(y)}, x = y(\log T(y))', x = \frac{1}{1-T(y)} \Rightarrow T(Y) = 1 - \frac{1}{x},$$

$$y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x} - 1\right), v(x) = \frac{y(x)}{y'(x)} = \frac{1}{(\log y(x))'} = v(x) =$$

$$= x^2(x-1), x > 1.$$

Розглянемо загальнішу ситуацію. Нехай функція f визначена на множині значень функції дерева, а функція $f(T(y))$ є абсолютно монотонна, тобто, розкладається в степеневий ряд $f(T(y)) = \sum_{n\ge 0} a_n y^n, a_n \ge 0, 0 \le y \le R$. Цей ряд породжує сім'ю цілочисельних розподілів з параметром y:

$$P\{\xi = k\} = \frac{a_n y^n}{f(T(y))}, n = 0,1,\ldots.$$

Визначимо середнє $\mathrm{E}\xi$ і дисперсію $\mathrm{D}\xi$ цих розподілів. Матимемо:

$$E\xi = \frac{d\log f(T(y))}{dy} = \frac{d\log f(T)}{dT} \cdot \frac{T(y)}{1-T(y)},$$

$$D\xi = \frac{ydE\xi}{dy} = \frac{T(y)}{(1-T(y))^3}\left(\frac{d\log f(T)}{dT} + T(1-T)\frac{d^2\log f(T)}{dT^2}\right).$$

(при виведенні цих формул використовується те, що $\dfrac{dT(y)}{dy} = \dfrac{T(y)}{y(1-T(y))}$).

Нехай $\mathrm{E}\xi = x$. В ряді випадків дисперсію $v(x) := D\xi$ можна виразити явно через x.

Приклад.

$$f(T(y)) = \frac{T(y)^r}{(1-T(y))^s}.\ E\xi = x = \frac{r + (s-r)T(y)}{(1-T(y))^2},$$

звідси

$$T(y) = \frac{1}{2x}(2x + s - r - a),\ \text{де } a = \sqrt{4sx + (r-s)^2}$$

$$D\xi = \frac{T(y)}{(1-T(y))^3}\left(\begin{array}{l} \dfrac{r}{T(y)} + \dfrac{s}{1-T(y)} + T(y)(1-T(y))\bullet \\ \bullet\left(-\dfrac{r}{T(y)^2} + \dfrac{s}{(1-T(y))^2}\right) \end{array}\right) =$$

$$(4x^2(s - r + 2x - a)(4sx + (r-s)^2 + (r-s)a)/(r - s + a)^4$$

Висновки та перспективи подальших розвідок напряму. В статті показано як отримати розклад у степеневий ряд функції дерева і ряду функцій, які виражаються через функцію дерева. В перспективі корисно було б розглянути застосування функції дерева для розв'язування алгебраїчних рівнянь і збільшити кількість прикладів розподілів степеневих рядів з параметризацією середнім.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Euler L, Deserie Lambertine plurimisque eins insignibus propriantatibus. Acta Acad. Scient. Petropul.2 – 1783. – 29-51,.
2. Corless R. H. On the Lambert W function / , G. H.Gonnet, D. E. Jeffrey, Knuth D. E. // .Advantes in Computational Mathematice – 1996. – Vol.5 – 339-359.
3. Knuth D. E. A recurrence related to Trees / D. E. Knuth, B. Pittel // Proc. the Amer. Math. Soc. – Vol.105 – Number 2 – 1989. – pp. 335-349.
4. Knuth D. E. The Art of computer programming / D.E. Knuth. – v.1. – Addison-Wesley, 1997.

REFERENCES

1. Euler, L. (1783). Deserie Lambertine plurimisque eins insignibus propriantatibus. Petropul.
2. Corless, R. H., Gonnet, G.H., Jeffrey, D.E. and Knuth, D.E., (1996) On the Lambert W function. *Advantes in Computational Mathematice*, Vol.5, 339-359.
3. Knuth, D. E. andPittel, B., (1989). A recurrence related to Trees. *Proc. the Amer. Math. Soc.*,Vol.105, Number 2, , pp.335-349.
4. Knuth, D. E. (1997) The Art of computer programming, v.1. Addison-Wesley.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ВОЛКОВ Юрій Іванович – професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: математичний аналіз, теорія ймовірностей. методика навчання математики, дискретна математика.

ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна – доцент, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: методика навчання математики, дискретна математика.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

VOLKOV Yurii Ivanovich − doctor of physics-mathematical sciences, professor, professor of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of research interests: mathematical analysis,theory probability, discrete mathematics, theory and methodology of teaching (mathematics).

VOJNALOVICH Natalia Mikhailivna − candidate of pedagogical sciences, docent, docent of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of research interests: theory and methodology of teaching (mathematics), discrete mathematics.

Стаття надійшла до редакції 05.11.2019 р.