education system of Ukraine: state and prospects of development]. *Visnyk TIMO*.

11. Mayorov, A. N. (2001). *Teoryya y praktyka sozdanyya testov dlya systemy obrazovanyya*. [The theory and practice of creation of tests for an education system]. Moscow.

12. Crocker, L., Algina, J. (1986). Introduction to classical and modern test theory. – Wadsworth: Thomson Learning.

13. Miller, G. E. (1990). The assessment of clinical skills/ competence/ performance. Acad Med. – Electronic resource. – [Access Mode]: http://winbev.pbworks.com/f/Assessment.pdf

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Кендюхова Антоніна Анатоліївна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри педагогіки, психології і корекційної освіти Комунального закладу «Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського».

Наукові інтереси: теорія та історія педагогіки, оцінювання якості освіти, тестологія

Яременко Людмила Іванівна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики, статистики та економіки Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: теорія та методика навчання математики, освітні вимірювання, гендерні дослідження.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Kendyuhova Antonina Anatoliivna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Pedagogy, Psychology and Correctional Education of the Communal Establishment «Kirovohrad Regional Institute of Postgraduate Pedagogical Education named after Vasyl Sukhomlynsky».

Circle of research interests: theory and history of pedagogy, evaluation of education quality, testology.

Yaremenko Liudmyla Ivanivna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Statistics and Economics of the VolodymyrVynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University

Circle of research interests: theory and methodology for teaching mathematics, evaluation of education quality, gender studies.

Дата надходження рукопису 08.11.2018 р.
Рецензент – к.пед.наук, доцент Абрамова О.В.

УДК 378.14

КЛЮЧНИК Інна Геннадіївна –
Кандидат фізико – математичних наук, доцент
доцент кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
ORCID ID 0000-0001-6874-7811
e-meil: Kl.innochka@gmail.com

ПОБУДОВА ПСЕВДООБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. До сучасних випускників предявляються високі вимоги щодо змісту знань, що визначає конкретну спроможність фахівця на сучасному ринку праці. При вивчені математики розглядаються задачі, для розв’язання яких потрібно творче застосування цих знань. Проблеми побудови конструктивних методів лінійних крайових задач для широкого класу систем диференціальних рівнянь: системи звичайних диференціаьних рівнянь традиційно займають одне з центральних і принципово важливих місць в якісній теорії диференціальних рівнянь. Це обумовлено перш за все важливістю практичного застосування теорії крайових задач в самих різноманітних галузях знань: теорії нелінійних коливань [1], теорії стійкості руху, теорії управління, в ряді радіотехнічних, механічних і біологічних задач. Особливості такого роду крайових задач в том, що в більшості випадків їх лінійна частина є оператором, який не має оберненого, що не дозволяє безпосередньо застосовувати традиційні методи дослідження крайових задач, основані на використанні принципа нерухомої точки. Необерненість лінійної частини оператора є наслідком того, що число m крайових умов не співпадає з порядком n операторної системи. Такого типу задачі для систем диференціальних рівнянь є нетеровими і включають в себе найбільш складні і мало досліджені як недовизначені так і перевизначені, як некритичні так і критичні крайові задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Саме тому більшість робіт, присвячені вивченю таких задач, виконані в припущені їх фредгольмовості (Е. А. Гребенніков, Д. К. Ліка, Ю. А. Рябов, І. Г. Малкін [2], А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, Н.І. Ронто [1]). В роботах [3,4] побудована загальна теорія крайових задач, приведена класифікація некритичних і критичних випадків, отримані ефективні коефіціентні умови існування і ітераціонні алгоритми побудови розв’язків цих задач. Багато результатів викладені в монографії, спочатку були отримані і апробіровані при аналізі крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. В подальшому ці схеми і алгоритми були запропоновані для дослідження більш загальних об’єктів: крайових задач для звичайних систем з зосередженим запізненням, для систем з імпульсною дією, для не всюди дозволених операторних рівнянь в функціональних просторах, лінійна частина яких – нормально дозволений оператор.

Мета статті. Вказати шляхи побудови узагальнено-оберненої матриці та псевдо оберненої матриці, продемонструвати застосування псевдооберненої матриці до розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь та до проблеми розв'язуваності систем лінійних диференціальних рівнянь з двоточковой крайовой умовой в критичному випадку.

Методом дослідження є апарат псевдообернених матриць і ортопроекторів з відображенням на ядро.

Виклад основного матеріалу дослідження. Означення. Оператор $L \in \mathcal{J}(H_1, H_2)$ називається узагальнено-оберненим, якщо існує оператор $X \in \mathcal{J}(H_1, H_2)$ такий, що $LXL = L$. Оператор X називається узагальнено-оберненим до оператора L і позначається L^-.

Із узагальнено-обернених операторів вибирають єдиний оператор, який задовольняє умови:

1. $LL^-L = L$;
2. $L^-LL^- = L^-$;
3. $(LL)^* = LL^-$;
4. $(L^-L)^* = L^-L$. (1)

Означення. Оператор L^-, який задовольняє умови (1) називається псевдооберненим оператором і позначається L^+.

Як відомо, для будь-якої неособливої квадратної матриці Q існує єдина обернена матриця. Якщо матриця Q прямокутна або особлива, то оберненої матриці в такому розумінні для неї не існує. Проте прагнення "обернути" і таку матицю Q призвело до побудови різних узагальнено-обернених матриць.

Означення Узагальнено-оберненою матрицею для довільної матриці Q називатимемо матрицю Q^+, яка задовольняє матричне рівняння: $QQ^+Q=Q$.

Означення. Матриця Q^+ називається псевдооберненою матрицею до матриці Q , якщо вона задовольняє такі критерії:

1) $Q^+QQ^+ = Q^+$;

2) $QQ^+Q = Q$;

3) $(QQ^+)^* = QQ^+$;

4) $(Q^+Q)^* = Q^+Q$.

Приклад. Знайти узагальнено-обернену матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Легко переконатися, що rank A =2. Поставимо у верхній лівий куток матриці A, визначник 2-го порядку (та як rank A =2) відмінний від нуля. Для цього поміняємо місцями 1-й і 3-й стовпчик матриці A.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10,$$

$$A_{11}^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$$

Матриці перестановок P і Q:

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо $X_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Запишемо узагальнено-обернену матриця A^+ до матриці A :

$$A^+ = QX_1P$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Приклад. Знайти узагальнено-обернену матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Узагальнено-обернена матриця знаходиться за формулою: $A^+ = QX_1P$.

$$M_i (i = 1,2) -,$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2,$$

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти псевдообернену матрицю, до матриці

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Скористаємося формулою знаходження псевдооберненої матриці:

$$Q^+ = (Q^T Q + P_Q)^{-1} Q^T.$$

Ранг матриці Q рівний 2, тому

$$P_{Q_r} = Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$P_{Q_r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0.$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю $(Q^T Q + P_{Q_r})^{-1}$:

$$\left|Q^T Q\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ a_{11} = (-1)^{1+1}\frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

$$a_{21} = (-1)^{1+2}\frac{1}{3} = -\frac{1}{3},\ a_{22} = (-1)^{2+2}\frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

отже $(Q^T Q + P_{Q_r})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$Q^+ = (Q^T Q + P_Q)^{-1} Q^T$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати лінійну систему алгебраїчних рівнянь Q^+, якщо, $Q = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, c \in R^2.$$

Розв'язання. З попереднього приклада, відомо, що псевдообернена матрицю Q^+ має вигляд

$$Q^+ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ортопроектори: P_Q і P_{Q^*}:

$$P_{Q^*} = I_m - QQ^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$P_{Q_d^*}$ – складається з одного вектора (m-rankQ=3-2=1).

$$P_{Q_d^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -x_3, x_2 = -x_3,\ x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1.$$

Отже $P_{Q_d^*} = (1,1,-1).$ А так, як

$P_{Q_d^*} b = (1,1,-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$ то рівняння $Qc = b$ нероз'язане

Приклад. Розв'язати лінійну систему алгебраїчних рівнянь $Qc = b$, якщо, $Q = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, c \in R^2.$$

Розв'язання. $Q^+ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{Q_r^*} = 0$,

$P_{Q_d^*} = (1,1,-1).$

Перевіримо умову $P_{Q_d^*} b = (1,1,-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Таким чином дана система має розв'язок. Оскільки $rankQ = n_1 = n = 2$, то система має єдиний розв'язок вигляду:

$$c = Q^{+}b + \bar{c},$$

де $\bar{c}$ – будь-який вектор із $N(Q)$, $\bar{c} = P_{Q_r} c \Rightarrow \bar{c} = 0.$

Отже $c = Q^{+}b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$

Приклад. Розглянемо двовимірну диференціальну систему

$$\dot{z} = \varphi(t), t \in [a;b], \varphi(t) \in c[t], n = 2$$

підпорядковану двоточковій крайовій умові

$lz = M_1 z(a) + M_2 z(b) = a$, де $M_i\,(i = 1,2)$ – прямокутні матриці розмірності (1×2),

$M_1 = (m_1, 0), M_2 = (0, m_2), (m_i \in R^1, m_i \neq 0, i = 1,2), \alpha$ – скаляр, $\alpha \in R^1 (m = 1).$

Тоді $X(t) = I_2, Q = lX = (m_1, m_2),$

$Q^{*} = Q^{T} = \begin{pmatrix}m_1\\m_2\end{pmatrix},\ P_{Q^{*}} = 0.$

В зв'язку з тим, що $rankQ = n_1 = m = 1 < n = 2,$ маємо критичний випадок

$$X_r(t) = \begin{pmatrix}-m_2\\m_1\end{pmatrix},$$

$$P_Q = \frac{1}{m_1^2 + m_2^2}\begin{pmatrix}-m_2\\m_1\end{pmatrix}(-m_2 \quad m_1) =$$

$$= \frac{1}{m_1^2 + m_2^2}\begin{pmatrix}m_2^2 & -m_1 m_2\\ -m_1 m_2 & m_1^2\end{pmatrix},$$

$$Q^{+} = (Q^{*}Q + P_Q)^{-1}Q^{*} = \frac{1}{m_1^2 + m_2^2}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\end{pmatrix}.$$

Згідно [4, ст 175], розглядувана крайова задача, при будь-яких $\varphi(t) = \begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix} \in C[a,b]$ і довільних $\alpha \in R$, $(P_{Q^{*}} = 0)$ має однопараметричне сімейство розв'язків $(r = n - n_1 = n - m = 1)$ виду

$$z_0(t, c_1) = \begin{pmatrix}-m_2\\m_1\end{pmatrix}c_1 +$$

$$\int_a^b (K(t,\tau) - X(t)Q^{+}lK(\cdot,\tau))\phi(\tau)d\tau + \frac{1}{m_1^2 + m_2^2}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\end{pmatrix}\alpha.$$

Висновки та перспективи подальших розвідок напряму. В роботі наведені прикладів побудови узагальнено-оберненої матриці, псевдооберненої матиці та застосування псевдооберненої матиці до розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь та до проблеми розв'язуваності систем лінійних диференціальних рівнянь з двоточковой крайовой умовой в критичному випадку.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.

2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / Малкин И.Г. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

3 Самойленко А.М. Линейные нетеровы кранвые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, А.А. Бойчук, // Укр. мат. журн. – 1992. – №4. – С.564 – 568.

4. Бойчук А. А. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи / Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. – Киев: Инст. мат. НАН Укр.,1995. – 318 с.

REFERENCES

1. Samoylenko, A.M., Perestiuk, N.A. (1987). *Differential equalizations with impulsive influence* [Impulsive differential equations]. Kyiv: Vysha Shkola.

2. Malkin, I.G. (1956). *Some tasks of theory of nonlinear vibrations* [Some problems of the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Statetechprod.

3. Samoylenko, A.M., Boychuk, A.A., (1992). *Linear neter regional tasks for the differential systems with impulsive influence* [Linear Noether Crane Problems for Impulse Impact Differential Systems]. Ukr.math.journal, №4, 564-568.

4. Boychuk, A.A., Zhuravlev, V.F., Samoylenko, A.M. (1995). *Generalized-reverse operators and neter regional tasks* [Generalized inverse operators and non-Caucasian boundary value problems]. Kyiv: Inst. math. NAS Ukr.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Ключник Інна Геннадіївна - кандидат фізико – математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

***Наукові інтереси*:** методика навчання у вищому навчальному закладі при підготовці майбутнього вчителя.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Kliuchnyk Inna Genadiivna– candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, docent of Department of Mathematics, Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of research interests: methodology of studies in higher educational establishment at preparation of future teacher.

Дата надходження рукопису 17.10.2018 р.
Рецензент – к.техн.наук, доцент Рябець С.І.