fakhivtsiv turystychnoi haluzi. [Objective pedagogical conditions for the formation of communicative competence of tourism industry specialists]. Zbirnyk naukovykh prats. Pedahohichni nauky – Collection of scientific papers. Pedagogical sciences. Vol. LXXVIII. T. 2. [in Ukrainian]

4. Prykhodko, V. V., Malyi, V. V., Halatska, V. L., & Myronenko, M. A. (2005). Slovnyk terminiv i poniat z pedahohiky vyshchoi shkoly [Glossary of terms and concepts in higher education pedagogy]. Dnipropetrovsk. [in Ukrainian]

5. Stryzhakov, A. (2023). Spilkuvannia ta suspilni vidnosyny. [Communication and social relations*]*. Naukovi zapysky – Proceedings. Vol. 3. [in Ukrainian]

6. Rebetska, N. (2017). Formuvannia komunikatyvnoi kompetentnosti maibutnikh fakhivtsiv sotsialnoi sfery yak pedahohichna problema. [Formation of Communicative Competence of Future Social Work Specialists as a Pedagogical Problem]. Naukovyi chasopys Natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni M. P. Drahomanova – Scientific journal of the National Pedagogical University named after M. P. Drahomanov. Vol. 29. P. 25–29. [in Ukrainian]

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ЗАВІТРЕНКО Долорес Жораївна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри педагогіки та спеціальної освіти Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: інклюзивний підхід при викладанні спеціальних методик.

БЕРЕЗЕНКО Наталія Олегівна – викладач кафедри іноземних мов Донецького державного університету внутрішніх справ.

Наукові інтереси: інноваційні технології навчання іноземних мов, лінгводидактичні засади викладання іноземних мов у вищих навчальних закладах, комунікативна компетентність здобувачів вищої освіти.

ЖИГОРА Ірина Валеріївна – кандидат філологічних наук, доцент кафедри дошкільної та початкової освіти Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: методика навчання української мови; інноваційні технології викладання української мови у вищих закладах освіти; інклюзивний підхід при викладанні української мови.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

ZAVITRENKO Dolores Zhoraivna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Pedagogy and Special Education of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University.

Scientific interests: an inclusive approach in teaching special techniques.

BEREZENKO Natalia Olegivna – teacher of the Department of Foreign Languages of the Donetsk State University of Internal Affairs.

Scientific interests: innovative technologies for teaching foreign languages, linguodidactic principles of teaching of foreign languages in higher education institutions, communicative competence of higher education students

ZHYHORA Iryna Valeriivna – Candidate of Philological Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Methods of Preschool and Primary Education of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University.

Scientific interests: methods of teaching the Ukrainian language; innovative technologies for teaching the Ukrainian language in higher educational institutions; inclusive approach to teaching the Ukrainian language.

Стаття надійшла до редакції 19.01.2025 р.

УДК 373:512
DOI: 10.36550/2415-7988-2025-1-217-124-131

ЗІНОВЄЄВА Ірина-Анастасія Ігорівна –
учитель математики Одеського ліцею №13
Одеської міської ради Одеської області
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-6162-4099
e-mail: iizinovyeyeva@onvk13.net
СИНЮКОВА Олена Миколаївна –
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри вищої
математики і статистики Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського»
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8340-6940
e-mail: olachepok@ukr.net

ЩОДО ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА РІВНІ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Згідно уявлень сьогодення евклідова геометрія представляє собою аксіоматичну теорію відповідної аксіоматики. Теоретично, може існувати безліч різних аксіоматик евклідової геометрії. Зрозуміло, що практично розроблено лише певну скінченну кількість із них. Зрозуміло також, що усі такі аксіоматики у визначеному розумінні є еквівалентними між собою - породжують однакову за своїм контентом аксіоматичну теорію.

У певному сенсі полярними серед аксіоматик евклідової геометрії є так звані аксіоматики синтетичного і аналітичного типів. Усі аксіоматики евклідової геометрії, неявним чином покладені в Україні у основу сучасних підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти, з позиції синтетичності та аналітичності носять мішаний характер, синтетична складова при цьому переважає. Для аксіоматичних теорій аналітичного типу, безпосередньо відповідно до їхньої сутності, координатно-векторні методи є первинними, основними методами розбудови відповідної теорії, справедливість кожного твердження теорії можна обґрунтувати за допомогою цих методів, синтетичні методи є вторинними, не завжди доцільними для застосувань. Для *аксіоматичних теорій синтетичного та мішаного типів вищенаведене твердження є правильним з точністю до навпаки. Все це означає, що для учителя математики закладів загальної середньої освіти питання з'ясування сутності координатно-векторних методів розв'язання задач евклідової геометрії, дослідження питань доцільності застосування саме цих методів для розв'язання тих чи інших видів задач, представляється актуальною складовою організації відповідного процесу навчання.*

У статті проаналізовано сутність застосування координатно-векторних методів до розв'язання задач евклідової геометрії, представленої у вигляді напівсинтетичної аксіоматичної теорії, доцільність застосування саме таких методів для розв'язання тих чи інших видів задач, наведено відповідні приклади.

Ключові слова: *евклідова геометрія, аксіоматика синтетичного типу, аксіоматика аналітичного типу, координатно-векторний метод, загальна середня освіта.*

ZINOVIEIEVA Iryna-Anastasiia Igorivna –
the teacher of Mathematics of the Odesa
Lyceum No. 13 of the Odesa City Council of the Odesa region
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-6162-4099
e-mail: iizinovyeyeva@onvk13.net
SINYUKOVA Olena Mukolaivna –
candidate of physical and mathematical
sciences, docent, associate professor
of the department of higher mathematics
and statistics of the State institution
«South Ukrainian National Pedagogical
University named after K. D. Ushinsky».
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8340-6940
e-mail: olachepok@ukr.net

ON THE APPLICATION OF COORDINATE-VECTOR METHODS TO SOLVING PROBLEMS OF EUCLID GEOMETRY AT THE LEVEL OF GENERAL SECONDARY EDUCATION

According to today's ideas, Euclidean geometry is an axiomatic theory of the corresponding axiomatics. Theoretically, there can be many different axiomatics of Euclidean geometry. It is clear that in practice only a certain finite number of them has been developed. It is also clear that all such axiomatics are equivalent to each other in an appointed sense - they give rise to the axiomatic theory with the same content.

In a certain sense, axiomatics of Euclidean geometry of the so-called synthetic and analytical types are polar to each other. In Ukraine, all the axiomatics of Euclidean geometry that in implicit form are put in the base of the corresponding up-to-date geometry textbooks for institutions of general secondary education from the point of view of their synthetic or analytical character are of the mixed type, but the synthetic component prevails. For axiomatic theories of the analytical type, directly in accordance with their essence, coordinate-vector methods are the primary ones, the main methods of building the corresponding theory, the validity of each statement of the theory can be substantiated with the help of these methods, synthetic methods are the secondary ones, not always expedient to implement. For axiomatic theories of synthetic or mixed type the above statement is quite the contrary. All this means that for a teacher of mathematics of institutions of general secondary education the question of clarifying the essence of coordinate-vector methods in solving problems of Euclidean geometry, investigation the questions of expediency of using just these methods for solving certain types of problems are the actual components of organization the corresponding process of training.

The essence of implementation the coordinate-vector methods for solving problems of Euclidean geometry presented in the form of a semi-synthetic axiomatic theory, the expediency of using just this methods for solving certain types of problems are analyzed in the article. There are given the corresponding examples.

Key words *Euclidean geometry, axiomatics of synthetic type, axiomatics of analytical type, coordinate-vector method, general secondary education.*

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Згідно з уявленнями сьогодення про сутність математики як науки, евклідова геометрія представляє собою аксіоматичну теорію певної аксіоматики. Остання, як і кожна аксіоматика, складається з переліку назв своїх основних неозначуваних множин, переліку назв своїх неозначуваних відношень разом з їх типізацією та формулювань відповідних аксіом [5, 11].

Теоретично, може існувати безліч різних аксіоматик евклідової геометрії, які різняться між собою як складом назв основних неозначуваних понять, так і складом аксіом. Зрозуміло, що практично розроблено лише певну скінченну кількість із них, Зрозуміло також, що усі такі аксіоматики у визначеному розумінні є еквівалентними між собою, породжують однакову за своїм контентом аксіоматичну теорію, саме тому й назва цієї теорії є єдиною, незалежно від виду аксіоматики, покладеної до її основи, – аксіоматична теорія евклідової геометрії.

У певному сенсі полярними серед аксіоматик евклідової геометрії є так звані аксіоматики синтетичного і аналітичного типів. Для аксіоматик аналітичного типу, безпосередньо відповідно до їхньої сутності, координатно-векторні методи є первинними, основними методами розбудови відповідної теорії, справедливість кожного твердження теорії можна обґрунтувати за допомогою цих методів, синтетичні методи є вторинними, не завжди доцільними для застосувань. Для аксіоматик синтетичного типу вищенаведене твердження є правильним з точністю до навпаки [7, 10].

Переважна більшість сучасних аксіоматик евклідової геометрії, обраних у якості теоретичного підґрунтя відповідних навчальних курсів на всіх рівнях освіти, насамперед, на рівні загальної середньої освіти, у зазначеному вище сенсі є аксіоматиками мішаного типу, але при цьому у них, традиційно, переважає саме синтетична складова. Отже, для кожного учителя математики закладу загальної середньої освіти, викладача математики закладу передвищої освіти, питання з'ясування сутності координатно-векторних методів розв'язання задач евклідової геометрії, дослідження питань доцільності застосування саме цих методів для розв'язання тих чи інших видів задач, представляється **актуальною** складовою відповідного процесу навчання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перша, історично відома аксіоматика евклідової геометрії, аксіоматика Евкліда, створена приблизно у третьому столітті до нашої ери, була у визначеному сенсі аксіоматикою синтетичного характеру. Первинними поняттями цієї аксіоматики, безумовно, можна вважати поняття точки, прямої та площини, відношення приналежності точки до прямої, відношення приналежності точки до площини. Правда, важко назвати такі поняття аксіоматичної теорії Евкліда неозначуваними. Евклід надав і цим поняттям, і цілій серії інших понять певних характеристик описового характеру, які і він сам, і наступні покоління математиків називали означеннями. Ці «означення» оперують поняттями, які знаходяться поза межами створеної Евклідом аксіоматичної теорії, у межах самої теорії не є зрозумілими. Виходячи з міркувань сьогодення, по відношенню до представленої аксіоматичної теорії вказані вище поняття варто вважати неозначуваними поняттями, хоча, за часів Евкліда у математиці, зрозуміло, ані загальне поняття про аксіоматику, ані поняття про складові елементи аксіоматики, сформованими ще не були, робота Евкліда заклала лише фундамент для їхнього усвідомлення [1, 6, 12].

Аксіоматика Д. Гільберта евклідової геометрії, сформульована видатним німецьким математиком Д. Гільбертом у 1899 році, стала тією однією з перших аксіоматик, найбільш вдалою із перших аксіоматик у першу чергу за своєю структурою, яка задовольняє усі вимоги до концепції аксіоматики сьогодення. Це типовий варіант аксіоматики синтетичного характеру [8, 10]. У аксіоматиці Д. Гільберта евклідової геометрії у якості назв неозначуваних множин обрано такі назви, як множина точок, множина прямих та множина площин, у якості назв неозначуваних відношень – відношення приналежності точки до прямої, відношення приналежності точки до площини, відношення «лежати між» для трьох точок однієї прямої, відношення рівності відрізків та відношення рівності кутів. Поняття дійсного числа, може бути введеним як елемент побудованої на підставі даної аксіоматики аксіоматичної теорії, із обов'язковим використанням аксіом неперервності. Якщо розглядати розроблену незалежно від аксіоматики евклідової геометрії аксіоматику теорії дійсного числа, то можна стверджувати, що у аксіоматичній теорії аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії існує, може бути спеціальним чином побудованою, модель аксіоматики дійсного числа (Саме існування такої побудови дозволяє розробити у межах аксіоматичної теорії евклідової геометрії такі невід'ємні її складові як теорія вимірювання відрізків, теорія вимірювання кутів, теорії вимірювання площ та об'ємів відповідних геометричних фігур). Поняття про числову вісь, афінну, зокрема, прямокутну декартову, систему координат на евклідовій площині та у евклідовому просторі, про відповідні координати точок, про вектор формуються у межах аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії, є невід'ємними складовими цієї теорії. Одночасно, формується і спеціальний координатно-векторний метод розв'язання геометричних задач, цей метод розглядається на рівні з іншими методами, які називають синтетичними, виокремлюються види задач, які вважається за доцільне розв'язувати саме координатно-векторним методом. Свого часу, в Україні, теоретичним підґрунтям курсів евклідової геометрії закладів загальної середньої освіти офіційно була аксіоматика евклідової геометрії, розроблена Д. Гільбертом [1].

Відомо, що можна побудувати модель аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії у аксіоматичній теорії дійсного числа. Саме таким чином обґрунтовується відносна несуперечливість аксіоматичної теорії Д. Гільберта. У такій моделі у якості точок, прямих та площин розглядають певні набори дійсних чисел, так звані набори відповідних координат. Зрозуміло, що при розгортанні аксіоматичної теорії евклідової геометрії у вигляді окремої складової аксіоматичної теорії дійсного числа для розв'язання задач цієї теорії координатні методи будуть переважити. Поняття про вектор, також як певний набір дійсних чисел, вводиться вже у межах розбудови відповідної теорії, це створює передумови застосування безпосередньо координатно-векторних методів для розв'язання різного виду задач. Вищевказаний варіант представлення аксіоматичної теорії евклідової геометрії, зрозуміло, вважають виключно аналітичним [10]. Навчальні курси евклідової геометрії, геометрії тривимірного евклідового простору, для будь-яких закладів освіти, теоретичне підґрунтя яких складає саме такий варіант аксіоматики евклідової геометрії, не є нам відомими. Одночасно, наприклад, у підручнику [4, с. 201], у рубриці «Коли зроблено уроки» автори знайомлять учнів десятих класів закладів загальної середньої освіти з поняттям чотиривимірного евклідового простору. І при цьому точкою чотиривимірного евклідового простору називають впорядковану четвірку дійсних чисел.

Класичним прикладом аксіоматики евклідової геометрії аналітичного типу є аксіоматика, розроблена у 1918 році видатним німецьким математиком і фізиком Г. Вейлем. Основні неозначувані множини цієї аксіоматики мають назви – множина точок і множина векторів. У якості допоміжної неозначуваної множини обрано множину R усіх дійсних чисел. Основні неозначувані відношення мають назви – додавання двох векторів, добуток вектору на дійсне число, скалярний добуток двох векторів, який визначається ненульовим вектором, відношення приналежності впорядкованої пари точок і вектора [1, 6, 10]. Відповідна аксіоматична теорія містить сформульовані за допомогою понять точки та вектора означення прямої, координатної прямої, афінної та прямокутної декартової систем координат на евклідовій площині та у евклідовому просторі. Зрозуміло, що застосування координат та векторів є інструментом, який дозволяє обґрунтувати справедливість будь-якого твердження такої аксіоматичної теорії.

Прикладом аксіоматики евклідової геометрії мішаного типу, такої, що поєднує у собі як синтетичні, так і аналітичні складові. є аксіоматика, розроблена видатним українським ученим-геометром О. В. Погорєловим. Основні неозначувані множини цієї аксіоматики мають назви – множина точок, множина прямих та множина площин. Одночасно, присутня й допоміжна неозначувана множина – множина R усіх дійсних чисел. Справедливість суттєвої частини тверджень побудованої на основі цієї аксіоматики аксіоматичної теорії обгрунтовується синтетично, необхідні доказові міркування є схожими до відповідних міркувань аксіоматичної теорії Д. Гільберта, поняття про вектор також вводиться як синтетичне поняття. За допомогою множини R усіх дійсних чисел будуються теорії вимірювання довжин відрізків, довжин векторів, мір кутів, площ та об'ємів відповідних геометричних фігур, означується рівність відрізків, рівність кутів, рівність трикутників, подібність трикутників, скалярний добуток векторів, будуються теорії рухів та перетворень подібності евклідової площини та евклідового простору. Множина R усіх дійсних чисел, зрозуміло, використовується для введення понять афінної та прямокутної декартової систем координат, як на площині, так і у просторі, що, разом з елементарною теорією векторів, створює необхідні передумови для формування у межах відповідної аксіоматичної теорії спеціального, координатно-векторного методу розв'язання задач [5].

Доведено, що аксіоматики евклідової геометрії Д. Гільберта і Г. Вейля є еквівалентними між собою, тобто породжують однакову за контентом аксіоматичну теорію [5, 10]. На підставі аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії справедливість будь-якого твердження відповідної аксіоматичної теорії можна обгрунтувати синтетично, без жодного використання координат і векторів, бо самі ці поняття є похідними неозначуваних понять даної аксіоматики. У межах аксіоматичної теорії Г. Вейля справедливість того ж самого твердження можна обґрунтувати виключно аналітично, Звідси випливає, що, по-перше, будь-яку задачу евклідової геометрії можна розв'язати аналітично, по-друге, про аналітичний метод як про спеціальний метод розв'язання задач евклідової геометрії, про доцільність або не доцільність використання такого методу має сенс вести мову лише у межах аксіоматичних теорій евклідової геометрії, побудованих на основі аксіоматик синтетичного або мішаного типу. Для аксіоматичних теорій евклідової геометрії, розроблених на основі аксіоматик аналітичного типу, має сенс, навпаки, ставити аналогічні питання по відношенню до синтетичного методу розв'язанні відповідних задач.

Мета роботи полягає в уточненні необхідних передумов та сутності застосування координатно-векторних методів для розв'язання задач евклідової геометрії, представленої у вигляді напівсинтетичної аксіоматичної теорії, наведенні доцільних прикладів подібних застосувань.

Методи дослідження. Для обґрунтування справедливості умовиводів теоретичного характеру було проведено опрацювання та порівняльний аналіз наукової й методичної літератури з теми дослідження, класифікацію та узагальнення отриманої інформації за допомогою як індуктивного, так і дедуктивного типу міркувань. Для визначення доцільних прикладів було застосовано емпіричні методи дослідження: опрацювання та проведення необхідного аналізу підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти, розв'язування задач.

Виклад основного матеріалу дослідження. На даний час, в Україні, теоретичне підґрунтя стандартних курсів евклідової геометрії для закладів загальної середньої освіти, фактично, складають різні модифікації аксіоматики евклідової геометрії, розробленої О. В. Погорєловим [5]. Отже, усі такі аксіоматики є аксіоматиками напівсинтетичного, мішаного типу, для відповідних аксіоматичних теорій має сенс ставити питання про сутність координатно-векторного методу розв'язання задач, досліджувати види задач, для розв'язання яких на різних етапах навчання саме для цього методу існує математична чи методична доцільність застосування.

У випадку застосування координатно-векторного методу для обґрунтування тверджень аксіоматичній теорії евклідової геометрії напівсинтетичного типу першим поняттям, яке вимагає акуратного введення, є поняття про числову вісь. Це поняття можна ввести як без застосування поняття про вектор, так і разом із застосуванням [2, 4, 7, 9]. У випадку другого варіанту поняття про вектор повинне передувати поняття про числову вісь, що, з урахуванням наявного в Україні сучасного контенту курсів математики закладів загальної середньої освіти, безпосередньо для цих курсів не представляється ані можливим, ані доцільним.

Поняття про афінну систему координат Oxy та її окремий випадок – прямокутну декартову систему координат Oxy – на евклідовій площині, афінну систему координат $Oxyz$ та її окремий випадок – прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ – у евклідовому просторі вводяться аналогічним чином. Задання на евклідовій площині афінної системи координат Oxy дозволяє для кожної точки M цієї площини спеціальним чином однозначно визначити впорядковану пару дійсних чисел $(x_M ; y_M)$ – координати даної точки відносно обраної системи координат. Як підсумок, встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною точок евклідової площини і множиною R^2 усіх впорядкованих пар дійсних чисел. Координати $(x_M ; y_M)$ кожної точки M відносно афінної системи координат Oxy співпадають з координатами її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ відносно базису множини векторів евклідової площини, визначеного даною системою координат. Аналогічно, задання у евклідовому просторі афінної системи координат $Oxyz$ дозволяє для кожної точки M простору спеціальним чином однозначно визначити впорядковану трійку дійсних чисел $(x_M; y_M; z_M)$ – координати даної точки відносно обраної системи координат. Як підсумок, встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною точок евклідового простору і множиною R^3 усіх впорядкованих трійок дійсних чисел. Координати $(x_M; y_M; z_M)$ кожної точки M відносно афінної системи координат $Oxyz$ співпадають з координатами її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ відносно базису множини векторів евклідового простору, визначеного даною системою координат [2, 7].

Розв'язання будь-якої задачі евклідової геометрії передбачає встановлення тих чи інших властивостей тієї чи іншої геометричної фігури.

Метод координат розв'язання задач у межах синтетичної або напівсинтетичної аксіоматичної теорії евклідової геометрії передбачає реалізацію наступних етапів:

1. Усвідомлення особливостей заданої, або визначеної за допомогою певних характеристичних властивостей синтетичного характеру геометричної фігури F, яка є об'єктом дослідження.
2. Обрання доцільної афінної системи координат $Oxyz$.
3. Знаходження аналітичних умов, що визначають задану фігуру F відносно заданої системи координат.
4. Дослідження визначених аналітичних умов аналітичними методами, отримання певних висновків аналітичного характеру.
5. Виокремлення серед отриманих висновків аналітичного характеру тих, що не залежать від обрання афінної системи координат, усвідомлення їхньої синтетичної сутності, і тим самим визначення певних геометричних (синтетичних) властивостей фігури F, яку досліджують.

Координатно-векторний метод розв'язання задач евклідової геометрії у межах відповідної синтетичної або напівсинтетичної аксіоматичної теорії передбачає, у випадку доцільності його застосування, векторний варіант задання обраної афінної системи координат, визначення аналітичних умов, які характеризують вихідні дані поставленої задачі, у вигляді векторних рівнянь чи нерівностей.

Незважаючи на те, що будь-яку задачу евклідової геометрії можна розв'язати аналітичним, тобто, координатно-векторним методом у межах будь-якої відповідної аксіоматичної теорії, у межах аксіоматичних теорій напівсинтетичного типу векторно-координатний метод важко визнати універсальним. Зрозуміло, що у межах таких аксіоматичних теорій значна кількість задач не може не мати аналітичного характеру вже безпосередньо за своєю умовою, і при розв'язанні задач такого типу уникнути використання координатно-векторних методів неможливо. Але для значної кількості інших задач синтетичні методи представляються суттєвим чином більш раціональними. Наведемо відповідний приклад.

Задача 1. Довести, що у випадку, коли ортоцентр та центроїд трикутника співпадають, трикутник є рівностороннім.

Дано. Трикутник ABC (рис. 1), про який відомо, що його центроїд, одночасно, є і його ортоцентром.

Довести. $AB=BC=CA$.

Розв'язання: Розглянемо заданий трикутник *AB*C. Позначимо через точку *M*, яка, одночасно, є його центроїдом і ортоцентром. Відповідно до правила трикутника додавання векторів, правильними є рівності: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$.

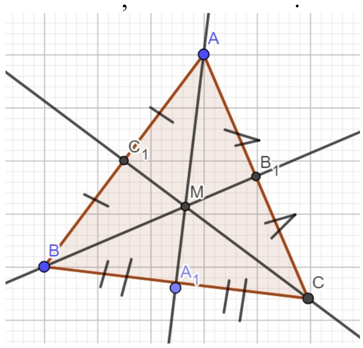

Рис. 1. До задачі 1

Зрозуміло, що для розв'язання поставленої задачі достатньо довести, що $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{CA}^2$. Центроїдом трикутника називається точка перетину його медіан. Відомо, що медіана трикутника – це відрізок, що сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони, усі три медіани трикутника перетинаються у одній точці і діляться у цій точці у відношенні 2:1, якщо рахувати від вершини. Звідси випливає, що, якщо відрізок *CC'* є медіаною даного трикутника *AB*C, то мають місце рівності $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC_1}=-\overrightarrow{MC}$, або $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

В силу того, що точка *M* є ортоцентром, у даному випадку безпосередньо точкою перетину висот трикутника *ABC*, правильним є твердження про те, що $\overrightarrow{MC}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, $\overrightarrow{MC}\cdot(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=0$, $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$, або $\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MA}^2=0$, $\overrightarrow{MB}^2=\overrightarrow{MA}^2$. Аналогічно, $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=0$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$, $(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=0$ або $\overrightarrow{MC}^2-\overrightarrow{MB}^2=0$, $\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2$. Тобто, у підсумку, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{MB}^2=\overrightarrow{MC}^2$. Але тоді зрозуміло, що $(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{MA})^2=(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})^2=(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})^2$, $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{CA}^2$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$, $AB=BC=CA$, що й треба було обґрунтувати.

Наведений спосіб розв'язання сформульованої задачі представлено у навчальному посібнику [3] як альтернативний. Зрозуміло, що таким способом цю задачу можна розв'язати після опанування теми «Вектори», тобто, на даний час, в Україні, у курсі геометрії дев'ятого класу. Але при цьому виникає питання – навіщо? Так, подібний спосіб розв'язання дозволяє вдосконалити навички оперування з векторами. Але такі навички можна вдосконалювати і під час розв'язання й інших задач, для яких застосування апарату векторного числення представляється більш природним. Сьогодні, за своїм контентом, ця задача відноситься до курсу евклідової геометрії сьмого класу. Її висновок є безпосереднім наслідком обов'язкового для опанування у вигляді теореми чи задачі твердження про те, що трикутник, у якого певна його медіана співпадає з висотою, є рівнобедреним. Справедливість останнього випливає з означень медіани і висоти трикутника та першої ознаки рівності трикутників.

У межах аксіоматичних теорій евклідової геометрії синтетичного або напівсинтетичного типів застосування координатно-векторних методів до розв'язання задач, умови яких носять синтетичний характер, представляється вельми доцільним тоді, коли при цьому виникає можливість реалізації однакового характеру міркувань за умови існування різних варіацій у вихідних даних. Наведемо приклад.

Задача 2. Довести, що симетрія відносно прямої є рухом евклідового простору.

Розв'язання. Відомо, що симетрія відносно прямої є перетворенням евклідового простору, яке геометрично задається прямою, що має назву осі симетрії. Кожна пряма евклідового простору визначає відповідну симетрію однозначно.

Розглянемо осьову симетрію f евклідового простору, віссю якої є певна пряма l.

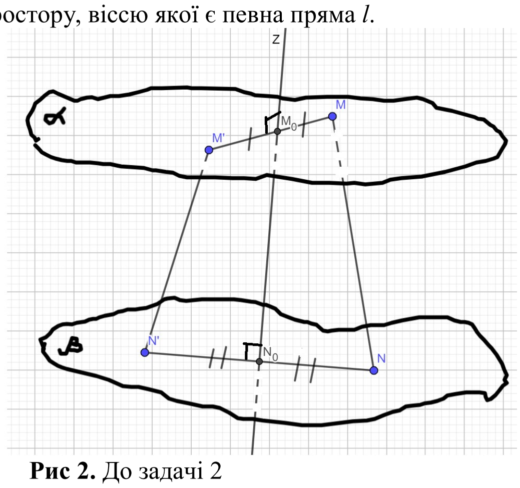

Рис 2. До задачі 2

Згідно означення осьової симетрії, якщо точка M належить осі симетрії l, то $f(M)=M$. Якщо точка M не належить прямій l, то розглядають перпендикуляр MM_0 до прямої l, $(M_0 \in l)$, на прямій MM_0 обирають таку точку M', що $M - M_0 - M'$, $MM_0 = M_0M'$. Вважають, що $f(M)=M'$. Зрозуміло, що наведений спосіб означення осьової симетрії f є синтетичним. Так само, синтетичним чином неважко перевірити, що означена вище симетрія f насправді є перетворенням евклідового простору – бієктивним відображенням простору на себе. Але при цьому, під час обґрунтування ін'єктивності відображення f вже доводиться розглядати десь п'ять різних випадків. З іншого боку очевидно, що ін'єктивність відображення f буде обґрунтовано, якщо буде доведено, що при відображенні зберігаються відстані між будь-якими двома точками. При цьому, зрозуміло, буде доведено, що f є рухом евклідового простору, задачу буде розв'язано. І ось для цього, здається, доцільніше за все застосувати координатно-векторний метод проведення міркувань.

Розглянемо у просторі прямокутну декартову систему координат *Oxyz*, на вісь *Oz* якої перетворено пряму l. При осьовій симетрії відносно прямої l кожна точка M простору з координатами (x_M, y_M, z_M) переходить у таку точку M' з координатами $(x_{M'}, y_{M'}, z_{M'})$, що $x_{M'} = -x_M$, $y_{M'} = -y_M$, $z_{M'} = z_M$ (точки M і M' є симетричними одна до одної відносно точки M_0, $MM_0 \perp l$, $M_0 \in l$, $M_0(0, 0, z_M)$). Отже, відносно обраної системи координат *Oxyz* перетворення f задається формулами $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$. Перевіримо, що, якщо $f(M)=M'$, $M(x_M, y_M, z_M)$, $M'(-x_M, -y_M, z_M)$, $f(N)=N'$, $N(x_N, y_N, z_N)$, $N'(-x_N, -y_N, z_N)$, то $MN = M'N'$.

$$(M'N')^2 = (-x_N - (-x_M))^2 + (-y_N - (-y_M))^2 + (z_N - z_M)^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M - z_N)^2 = (MN)^2$$

Звідси випливає, що $MN = M'N'$. У підсумку, задачу розв'язано.

Наведемо приклад ще однієї задачі, для розв'язання якої доцільним є використання методу координат і, при цьому, обрання саме прямокутної декартової системи координат не є обов'язковим, навіть, не є доречним.

Задача 3. У просторі задано довільний трикутник *ABC*. Задано також довільну точку *M*, яка не належить площині цього трикутника. Точка *M* двічі послідовно відображається відносно усіх вершин даного трикутника. Довести, що точка, отримана після останнього кроку відображень. буде співпадати з точкою *M*.

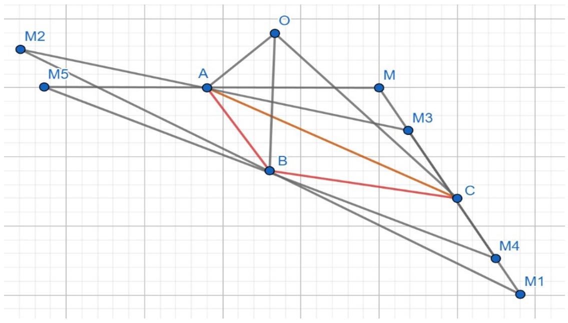

Рис. 3. До задачі 3

Розв'язання. Оберемо у просторі таку афінну систему координат *Oxyz*, щоб точка *A* належала координатній осі *Ox* і відносно даної системи координат мала координати *A(1,0,0)*, точка *B* - належала координатній осі *Oy*, відносно даної системи координат мала би координати $B(0,1,0)$, точка *C* належала би координатній осі *Oz* і мала би координати $C(0,0,1)$. Припустимо, відносно обраної системи координат точка *M* має координати $M(a,b,c)$. Нехай точка M_1 є симетричною до точки *M* відносно точки *C*. В силу того, що $MC = CM_1$, координати точки можна визначити за допомогою формул для знаходження координат середини відрізка. Отже, будемо мати: $x_C = \frac{1}{2}(x_M + x_{M_1})$; $x_{M_1} = 2x_C - x_M = -a$; $y_C = \frac{1}{2}(y_M + y_{M_1})$, $y_{M_1} = 2y_C - y_M = -b$; $z_C = \frac{1}{2}(z_M + z_{M_1})$, $z_{M_1} = 2z_C - z_M = 2 - c$. Точка M_2 є точкою, симетричною до точки M_1 відносно точки *B*. Звідси випливає, що $x_{M_2} = 2x_B - x_{M_1} = a$, $y_{M_2} = 2y_B - y_{M_1} = 2 + b$, $z_{M_2} = 2z_B - z_{M_1} = c - 2$. Точка M_3 є точкою, симетричною до точки M_2 відносно точки *A*. Це означає, що $x_{M_3} = 2x_A - x_{M_2} = 2 - a$, $y_{M_3} = 2y_A - y_{M_2} = -2 - b$, $z_{M_3} = 2z_A - z_{M_2} = 2 - c$. Точка M_4 є точкою, симетричною до точки M_3 відносно точки *C*. Звідси випливає, що $x_{M_4} = 2x_C - x_{M_3} = -2 + a$, $y_{M_4} = 2y_C - y_{M_3} = 2 + b$, $z_{M_4} = 2z_C - z_{M_3} = c$. Точка M_5 є точкою, симетричною до точки M_4 відносно точки *B*. Це означає, що $x_{M_5} = 2x_B - x_{M_4} = -a$, $y_{M_5} = 2y_B - y_{M_4} = -b$, $z_{M_5} = 2z_B - z_{M_4} = -c$. Точка M_6 є симетричною до точки M_5 відносно точки *A*. Отже, $x_{M_6} = 2x_A - x_{M_5} = a$, $y_{M_6} = 2y_A - y_{M_5} = b$, $z_{M_6} = 2z_A - z_{M_5} = c$. У підсумку, координати точки M_6 співпадають з координатами точки *M*, точка M_6 співпадає з точкою *M*, що й треба було довести.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розвідок напряму. У підсумку, у роботі проаналізовано теоретичні та практичні аспекти застосування координатно-векторних методів для розв'язання задач евклідової геометрії.

Насамперед, виходячи з теоретичних міркувань, розглянуто такі поняття як «синтетична аксіоматична теорія евклідової геометрії», «аналітична аксіоматична теорія евклідової геометрії», «аксіоматична теорія евклідової геометрії мішаного типу».

В силу того, що усі аксіоматичні теорії евклідової геометрії, неявним чином покладені в Україні у основу сучасних курсів геометрії для закладів загальної середньої освіти, з позиції синтетичності та аналітичності носять мішаний характер і синтетична складова при цьому переважає, питання з'ясування сутності координатно-векторних методів розв'язання задач евклідової геометрії, дослідження питань щодо доцільності застосування саме цих методів для розв'язання тих чи інших видів задач, розглянуті саме для таких аксіоматичних теорій. Наведено відповідні зразки.

Загальні висновки є наступними.

1. Незважаючи на те, що будь-яку задачу евклідової геометрії можна розв'язати аналітичним, тобто, координатно-векторним методом у межах будь-якої відповідної аксіоматичної теорії, у межах аксіоматичних теорій напівсинтетичного типу векторно-координатний метод важко визнати універсальним. Далеко не кожну задачу має сенс розв'язувати саме таким методом. Для значної кількості задач синтетичні методи представляються суттєвим чином більш раціональними.

2. Одночасно, у межах будь-якої напівсинтетичної аксіоматичної теорії евклідової геометрії існує значна кількість задач, розв'язання яких суттєвим чином спрощується саме завдяки використанню координатно-векторних методів. Виокремлення типів подібних задач представляє собою достатньо складну задачу формування відповідного контенту навчання. У представленій роботі наведено лише певні приклади. Сформульована вище загальна задача, безумовно, заслуговує подальшої уваги.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бевз В. Г. Історія математики, Харків: Основа, 2006, 176 с.
2. Городецький В. В., Боднарук С. Б., Довгей Ж. І., Лучко В. С. Аналітична геометрія в теоремах та задачах: навч. посіб. Чернівці: ЧНУ, 2018, 382 с.
3. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії: навч. посіб. Київ: Абрис, 1994. 463 с.
4. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. В., Якір М. С. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 240 с.
5. Синюкова О. М. Конструктивні аспекти евклідової геометрії. Тексти лекцій. Одеса: Фенікс, 2022. 147 с.
6. Fauvel, J. & Gray, J., (1987). The History of Mathematics: A Reader. Red Globe Press. 628 p.
7. Halsted George Bruce. (2018). Elementary Synthetic Geometry. Forgotten Books. 176 p.
8. Hilbert, David. The Foundations of Geometry. Authorized translation E. J. Townsend. University of Illinois. The Open Court Publishing Company LA-SALLE. Illinois, 1950. 86 p.
9. Jacobs Harold R. Geometry: Seeing, Doing, Understanding. Vaster Dooks, 3rd addition, 2020. 780 p.
10. Kunen, K. (2009). The Foundations of Mathematics (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations). College Publications. 262 p.
11. Serovaisky, S. (2022). Architecture of Mathematrics. USA, Chapman & Hall. 394 p.
12. Van Der Waerden B. L. (2002). Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Springer. 223 p.

REFERENCES

1. Bevz, V. H. (2006). Istoriia matematyky [History of mathematics], Kharkiv: Osnova, 176 s. [in Ukrainian]

2. Horodetskyi, V. V., Bodnaruk, S. B., Dovhei, Zh.I., Luchko, V. S. (2018). Analitychna heometriia v teoremakh ta zadachakh: navch. posib. [Analytical geometry in theorems and problems: possible]. Chernivtsi: ChNU, 382 s. [in Ukrainian]
3. Kushnir, I. A. (1994). Metody rozviazannia zadach z heometrii: navch. posib [Methods of solving geometry problems]. Kyiv: Abrys, 463 s. [in Ukrainian]
4. Merzliak, A. H., Nomirovskyi, D. A., Polonskyi, V. V., Yakir, M. S. (2018). Heometriia: prof. riven: pidruch. dlia 10 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Geometry: prof. riven: pidruch. dlia 10 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity]. Kharkiv: Himnaziia, 240 s. [in Ukrainian]
5. Syniukova, O. M. (2022). Konstruktyvni aspekty evklidovoi heometrii [Constructive aspects of Euclidian geometry]. Teksty lektsii. Odesa: Feniks, 147 s.
6. Fauvel, J. & Gray, J., (1987). The History of Mathematics: A Reader. Red Globe Press. 628 p. [in Ukrainian]
7. Halsted George Bruce. (2018). Elementary Synthetic Geometry. Forgotten Books. 176 p.
8. Hilbert, David. (1950). The Foundations of Geometry. Authorized translation E. J. Townsend. University of Illinois. The Open Court Publishing Company LA-SALLE. Illinois, 86 p.
9. Jacobs Harold R. (2020). Geometry: Seeing, Doing, Understanding. Vaster Dooks, 3rd addition, 780 p.
10. Kunen, K. (2009). The Foundations of Mathematics (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations). College Publications. 262 p.
11. Serovaisky, S. (2022). Architecture of Mathematrics. USA, Chapman & Hall. 394 p.
12. Van Der Waerden B. L. (2002). Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Springer. 223 p.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ЗІНОВЄЄВА Ірина-Анастасія Ігорівна – учитель математики Одеського ліцею №13 Одеської міської ради Одеської області.

Наукові інтереси: методика навчання математики у закладах загальної середньої освіти, зокрема, методика навчання планіметрії.

СИНЮКОВА Олена Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського».

Наукові інтереси: ріманова геометрія та її узагальнення, методика навчання геометрії у закладах вищої освіти, методика навчання геометрії у закладах загальної середньої освіти.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

ZINOVIEIEVA Iryna-Anastasiia Igorivna – a teacher of Mathematics of the Odesa Lyceum No. 13 of the Odesa City Council of the Odesa region.

Scientific interests: methods of teaching mathematics at institutions of general secondary education, in particular, methods of teaching Plane geometry.

SINYUKOVA Olena Mukolaivna – candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer, senior lecturer of department of higher mathematics and statistics of the State institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky».

Scientific interests: riemannian geometry and its generalizations, methods of teaching geometry in higher school, methods of teaching geometry in secondary school.

Стаття надійшла до редакції 19.01.2025 р.

УДК 373.2.015.31:37.091.33-027.22:796
DOI: 10.36550/2415-7988-2025-1-217-131-136

ЗУБАЛІЙ Алла Олександрівна –
аспірант
Центральноукраїнського державного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-1071-1256
e-mail: alla.zubalii@gmail.com

ТВОРЧІ ЗДІБНОСТІ ДІТЕЙ СТАРШОГО ДОШКІЛЬНОГО ВІКУ ТА ГОТОВНІСТЬ ДО ЇХ ФОРМУВАННЯ

В статті зазначається, що розвиток творчості дітей набуває державного значення, що висвітлено в багатьох державних документах. Потреба управління творчістю та наукою в інтересах виробництва сприяла виникненню автономного напряму в галузі психології творчості, який був пов'язаний з вивченням технічної творчості. Поняття творчість витлумачено як «діяльність, результатом якої є створення оригінальних та більш досконалих духовних та матеріальних цінностей, що мають об'єктивну або ж суб'єктивну значущість.

Автор наголошує на тому, що старший дошкільний вік це період активного розвитку творчих здібностей. Існує чотири провідні критерії розвитку цих здібностей: побіжність; оригінальність; розробленість; гнучкість мислення. Виділено основні етапи творчої діяльності дітей дошкільного віку: виникнення проблеми (поява відчуття незрозумілості); виникнення низки запитань та уточнень; виділення провідних елементів, які необхідні для вирішення проблеми; усвідомлення дитиною проблеми; формування гіпотези; пошук та знаходження дитиною рішення.

Зазначено, що дитяча творчість має певні характеристики, з-поміж яких виокремлюються: оригінальність (здатність розв'язувати проблеми нестандартно); семантична гнучкість (виражається у здатності до мовленнєвої творчості (утворення нових слів, рим), підвищеній чутливості до мовлення); образна адаптивна гнучкість (здатність виділяти функції об'єкта таким чином, щоб побачити в ньому нові можливості); стихійна гнучкість (здатність знаходити оригінальні ідеї у дещо обмеженій ситуації).

Наголошено на тому, що педагогам при розробці та реалізації методики розвитку творчих здібностей дітей старшого дошкільного віку треба враховувати наступні принципи: принцип наочності, принцип творчої співпраці, зацікавленість дошкільника у виконанні творчих завдань, врахування індивідуальних особливостей дошкільника, установка педагога на творче виконання завдання, принцип цілеспрямованого створення ситуації успіху та ситуації творчого мовленнєвого самовираження, принцип диференційованого підходу.

Ключові слова: *творчість, діти дошкільного віку, творча діяльність, творчий потенціал, діяльність.*