navchannia) [Modern technologies in education (immersive technologies, STEM education, blended learning)]. [in Ukrainian].

5. Skaskiv, G. M. (2021). Vprovadzhennia tekhnolohii heimifikatsii v osvitnii protses [Implementation of gamification technologies in the educational process]. Naukovyi chasopys natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni M. P. Drahomanova. Ser. 5 : Pedahohichni nauky: realii ta perspektyvy [in Ukrainian].

6. Savchuk, O. & Kuh, A. (2023). Osoblyvosti vyvchennia robototekhniky na zaniattiakh STEM hurtka [Peculiarities of studying robotics in STEM classes]. Zbirnyk tez dopovidei za materialamy mizhnarodnoi naukovometodychnoi konferentsii «Tekhnolohichne zabezpechennia STEMosvity v umovakh pidhotovky fakhivtsia pyrodnycho-matematychnoho napriamu» prysviachenoi 105-y richnytsi Kamianets-Podilskoho natsionalnoho universytetu imeni Ivana Ohiienka. [in Ukrainian].

7. Trischuk, O. V., Figol, N. M., & Volik, N. S. (2019). Heimifikatsiia v osvitnomu protsesi [Gamification in the educational process]. Tekhnolohiia i tekhnika drukarstva 3(65), 72–79. [in Ukrainian].

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

СЕМЕРНЯ Оксана Миколаївна – доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри біології та екології Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

Наукові інтереси: інноваційні технології в природничій освіті.

СУХОВІРСЬКИЙ Олег Васильович – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри природничо-математичних дисциплін Хмельницької гуманітарно-педагогічної академії.

Наукові інтереси: природничо-математична освіта.

РУДНИЦЬКА Жанна Олександрівна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри загальної та прикладної фізики Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси: методика навчання фізики.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

SEMERNIA Oksana Mikolaiivna – Doctor of Education, Ass. Professor, Ass. Professor of the Department of Biology and Ecology Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University.

Scientific interests: innovative technologies in science education.

SUHOVIRSKYI Oleh Vasilioyvich – Ph.D in Pedagogical Science, Ass. Professor, Ass. Professor of the Department of Natural and Mathematical Disciplines Khmelnitsky Humanities Pedagogical Academy.

Scientific interests: science and mathematics education.

RUDNYTSKA Zhanna Oleksandrivna – Ph.D in Pedagogical Science, Ass. Professor,Ass. Professor of the Department of General and Applied Physics National Aviation University.

Scientific interests: didactic of physics.

Стаття надійшла до редакції 30.01.2024 р.

УДК 001.891.519:520
DOI: 10.36550/2415-7988-2024-1-212-60-67

ТКАЧЕНКО Ігор Анатолійович –
доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук
Уманського державного педагогічного університету
імені Павла Тичини
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1775-1110
e-mail: tkachenko.igor1071@gmail.com
КРАСНОБОКИЙ Юрій Миколайович –
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук
Уманського державного педагогічного університету
імені Павла Тичини
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2103-9978
e-mail: ymk201113@gmail.com
ІЛЬНІЦЬКА Катерина Сергіївна –
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук
Уманського державного педагогічного університету
імені Павла Тичини
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6179-5543
e-mail: e-ilnitskaja@udpu.edu.ua

ДО МЕТОДИКИ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У АСТРОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

У процесі викладання курсу астрономії на бакалавраті у педагогічних університетах для опису фізичних характеристик небесних тіл широко використовують різні математичні методи. У статті наведено приклад використання одного з математичних методів інтерпретації результатів астрономічних досліджень, а саме методу найменших квадратів. Наводяться характеристики різних типів змінних зір, оцінюються їх параметри в частині *функціональної залежності блиску зір від періоду його зміни. Під час вивчення розділу «Зорі. Класифікація зір» з курсу загальної астрономії саме й розглядаються небесні об'єкти, у яких відбуваються характерні зміни блиску. Такі об'єкти утворюють групу пульсуючих зір серед яких, виділяють цефеїди, міриди, віргініди, ліриди, зорі типу RV Тельця, довгоперіодичні змінні, напівправильні змінні тощо. У статті показано, як для обрахунку зміни періоду блиску зір можна використати метод найменших квадратів. Суть цього методу полягає у використанні опосередкованих даних астрономічних спостережень для складання системи «умовних» рівнянь, які містять певні невідомі величини щодо конкретних зір. Для встановлення чисельних значень цих невідомих, з каталогів обираються «зорі порівняння» з відомими параметрами. За допомогою такого підходу складається система «нормальних рівнянь», застосувавши до якої метод найменших квадратів, визначаються необхідні параметри досліджуваних зір та їх похибки. Розрахунки проводилися шляхом уточнення значень періодів змінних зір. Це пов'язано з тим, що спостережені і аналітично обчислені моменти мінімуму або максимуму періоду зміни блиску зорі не співпадають, тому виникає необхідність в уточненні величини періоду. Особливість обрахунків цих величин полягає у тому, що використовуються всі дані, отримані у будь-який момент спостереження вказаної зорі з урахуванням похибки визначення моменту початкового мінімуму періоду та його поправки.*

Подальшим перспективним напрямом застосування методу найменших квадратів вбачається можливість його використання для розрахунку подібних параметрів інших типів зір, планет, супутників тощо. Такий підхід дає змогу оцінювати закономірності, які спостерігаються на тлі випадкових коливань вимірюваних величин, з подальшим використанням вищезгаданого математичного методу як функції прогнозування. Дослідження зміни фізичних характеристик зір визначатиме їх чільне місце в еволюції зоряних систем, галактик та Всесвіту в цілому.

Ключові слова: *освітній процес, астрономія, зоряні величини, блиск зір, метод найменших квадратів.*

TKACHENKO Ihor Anatoliiovych –
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1775-1110
e-mail: tkachenko.igor1071@gmail.com
KRASNOBOKYI Yurii Mykolayovych –
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2103-9978
e-mail: ymk201113@gmail.com
ILNITSKA Kateryna Serhiivna –
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6179-5543
e-mail: e-ilnitskaja@udpu.edu.ua

ON THE METHOD OF USING THE MATHEMATICAL METHOD OF LEAST SQUARES IN ASTRONOMICAL RESEARCH

Various mathematical methods are widely used to describe the physical characteristics of celestial bodies in the process of teaching undergraduate astronomy courses at pedagogical universities. The article provides an example of using one of the mathematical methods of interpreting the results of astronomical research, namely the method of least squares. The characteristics of various types of variable stars are given, and their parameters are evaluated in terms of the functional dependence of star brightness on the period of its change. While studying the chapter "Stars. The classification of stars" from the course of general astronomy deals with celestial objects in which characteristic changes in brightness occur. Such objects form a group of pulsating stars, among which are Cepheids, Mirids, Virginids, Lyrids, stars of the RV Taurus type, long-period variables, semiregular variables, etc. The article shows how the method of least squares can be used to calculate the change in the brightness period of stars. The essence of this method is to use the indirect data of astronomical observations to compile a system of "conditional" equations that contain certain unknown values for specific stars. To establish the numerical values of these unknowns, "comparison stars" with known parameters are selected from the catalogs. With the help of such an approach, a system of "normal equations" is created, to which, by applying the method of least squares, the necessary parameters of the studied stars and their errors are determined. The calculations were carried out by specifying the values of the periods of variable stars. This is due to the fact that the observed and analytically calculated moments of the minimum or maximum of the period of the star's brightness change do not coincide, so there is a need to specify the value of the period. The peculiarity of the calculations of these values is that all data obtained at any moment of observation of the specified star are used, taking into account the error of determining the moment of the initial minimum of the period and its correction.

The possibility of using it to calculate similar parameters of other types of stars, planets, satellites, etc. is seen as a further promising direction of application of the least squares method. This approach makes it possible to evaluate patterns observed against the background of random fluctuations of measured quantities, with the subsequent use of the above-mentioned mathematical method as a forecasting function. The study of changes in the physical characteristics of stars will determine their prominent place in the evolution of star systems, galaxies and the universe as a whole.

Keywords: *educational process, astronomy, stellar magnitudes, brightness of stars, method of least squares.*

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Вивчення астрономії у закладах загальної середньої освіти, та й на бакалавраті природничих спеціальностей педагогічних університетів, базується на спостереженнях за небесними тілами – переважно зорями і планетами [1; 2; 3]. За цього основними фізичними характеристиками, які порівняно легко визначати, є блиск зір і період його зміни.

Важливою ланкою підвищення ефективності засвоєння навчального матеріалу з астрономії, астрофізики, математики та інших фундаментальних наук є залучення здобувачів освіти до проведення наукових досліджень. Передусім, це опанування розв'язування астрономічних задач математичними методами, проведення самостійних спостережень за небесними об'єктами, виконання індивідуально-наукових завдань, використання розрахункових задач творчого характеру тощо. Освітня діяльність даного виду стимулює студентів і учнів до більш вдумливого опрацювання рекомендованих підручників та посібників, до пошуку додаткових джерел отримання астрономічних знань, (зокрема, праць іноземних дослідників, сучасних наукових інтернет-порталів тощо). Такий підхід сприяє формуванню дослідницької компетентності, дозволяє сформувати у свідомості студентів комплексу астрофізичних понять, закономірностей та явищ. Реальним засобом набуття у здобувачів освіти глибоких й міцних знань з астрономії, на нашу думку, може стати впровадження в освітній процес завдань розрахунково-обчислювального характеру.

Астрономічні науки відносяться до категорії таких, предмет дослідження яких (небесні тіла), з метою їх вивчення, не можна відтворити у лабораторних умовах. Тому для адекватного опису космічних явищ здійснюється велика кількість спостережень різними методами з використанням сучасного астрономічного інструментарію. На основі проведених спостережень створюються відповідні моделі досліджуваних явищ і перебігу в них процесів. До цих моделей застосовується відповідний математичний апарат, який дає можливість отримати функціональні залежності між основними параметрами, що характеризують те чи те космічне явище, яке цікавить дослідника.

Однією з таких поширених в астрономії і астрофізиці **проблем** є визначення періодів зміни блиску зір, вирішення якої дає об'ємну інформацію щодо їх природи, стану функціонування, часу життя і т. ін.

З цією метою у пропонованій статті саме й пропонується один з варіантів вирішення означеної проблеми із застосуванням **математичного методу найменших квадратів**.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Оцінка блиску світил зоряними величинами практикувалася вже у II ст. до н. е. грецьким астрономом Гіппархом і ґрунтується на сприйнятті світла людським оком, яке здатне відрізняти інтенсивності різних джерел світла, якщо одне з них яскравіше за інше приблизно у 2,5 рази. Дана властивість ока стала відома у науці лише в кінці XVII ст. і є частковим випадком психофізіологічного закону, сформульованого у XIX ст. фізіологом Е. Вебером (1795-1878) та психологом Г. Фехнером (1801-1887). Завдяки дослідженням англійського астронома Н.Р. Погсона (1829-1891) була встановлена формула для обрахунків зміни блиску візуальної видимої та абсолютної зоряних величин зір. Вивченню інформації про різні напрями та методи сучасної астрономії, результатів експериментальних і теоретичних досліджень близького й далекого Космосу; формуванню найважливіших понять астрономії, цілісної сучасної астрономічної картини світу присвячені праці відомих вітчизняних вчених Ю.В. Александрова, С.М. Андрієвського, А.М. Грецького, В.А. Захожая, І.А. Климишина, С.Г. Кузьменкова, Я.С. Яцківа, а також іноземних дослідників Soszyński I., Udalski A., Szymański M.K., Kubiak M., Pietrzyński G., Wyrzykowski Ł., Szewczyk O., Ulaczyk K., Karttunen H., Kroger P., Oja H., Poutanen M., Donner K.J. Використання математичного методу найменших квадратів у різних галузях наукової діяльності розглядали І.В. Антохонова, Й.І. Гіхман, В.Л. Голець, М.В. Карташов, В.Ю. Клепко, А.В. Скороход, М.В Ядренко та інші. Разом з тим, на часі залишається проблема практичного використання методики застосування математичних методів у процесі вивчення астрономії у закладах загальної середньої освіти та педагогічних університетів.

Мета статті – показати методичні можливості застосування математичного методу найменших квадратів щодо інтерпретації результатів астрономічних досліджень різних космічних об'єктів.

Методи дослідження: комплексний аналіз даних спостереження небесних об'єктів, зазначених у астрономічних довідниках та наукових джерелах, на основі яких репрезентувалася методика використання математичного апарату під час вивчення природничих наук.

Виклад основного матеріалу дослідження. Зручними «кандидатами» для вивчення зі світу зір є цефеїди і міриди. Окремі типи змінних зір називають за зорею-прототипом (наприклад, зорі типу W Діви, типу T Тельця тощо). Змінні зорі типу δ Цефея називають цефеїдами (класичними цефеїдами), зорі типу W Діви – віргінідами, типу RR Ліри – ліридами. Фізично змінні залежно від особливостей змінності ділять на дві основні групи: пульсуючі змінні, в яких зміни блиску зумовлені періодичним або квазіперіодичним коливанням їх радіуса і ефективної температури навколо певних середніх значень; та еруптивні змінні, в яких зміни блиску спричинені більш складними процесами, зокрема, пов'язаними з раптовим виділенням енергії внаслідок вибухоподібного процесу. За амплітудами, тривалістю циклу та іншими особливостями кривих зміни блиску як пульсуючі, так і еруптивні змінні поділено на окремі типи. Наприклад, у групі пульсуючих зір виділяють цефеїди, віргініди, ліриди, зорі типу RV Тельця, довгоперіодичні змінні, напівправильні змінні тощо. До групи еруптивних зір належать зорі типу Т Тельця, UV Кита, нові зорі, новоподібні, зорі типу U Близнят і наднові зорі [1; 5].

До цефеїд належать пульсуючі змінні зорі-гіганти спектральних класів від A до G, які мають період коливання блиску не більший від кількох діб (короткоперіодичні) або кількох десятків діб (довгоперіодичні). Міриди – довгоперіодичні змінні зорі-гіганти пізніх класів (в основному M-класу) з періодом зміни блиску в кілька сотень діб. Для зір цих типів характерні ритмічні, з точністю доброго годинникового механізму, зміни блиску і певна залежність форми кривої блиску від періоду P. Довгий час певні групи пульсуючих змінних об'єднували під назвою цефеїди. Однак і тоді був поділ на довгоперіодичні або класичні цефеїди (їхнім прототипом була зоря δ Цефея) і короткоперіодичні цефеїди (прототип –зоря RR Ліри). Виділення окремих типів «колишніх» цефеїд – лірид і віргінід – супроводжувалися певними змінами в уявленнях щодо масштабів Галактики і галактичного світу в цілому. У Галактиці зір цього типу відкрито близько тисячі. Багато цефеїд знайдено і в інших галактиках. Амплітуди зміни блиску відомих цефеїд нашої Галактики, класифікація яких не викликає сумнівів, перебувають в межах від 0,2m (для унікальної цефеїди Полярної – α Малої Ведмедиці – амплітуда ще десять років тому становила приблизно 0,010m, нині становить 0,015m і збільшується з часом) до 2m, а періоди – від 1 до 135 діб. Цефеїди в інших галактиках часто мають періоди понад 100 діб, а в нашій же Галактиці таких об'єктів виявлено усього декілька. Середня абсолютна візуальна зоряна величина цефеїд M = –4m, вони є надгігантами спектральних класів F і G (деякі цефеїди у мінімумі блиску мають спектральний клас K). Як вже було сказано, типовим представником цієї групи змінних є зоря δ Цефея, яка ритмічно змінює свій блиск від приблизно 3,5m до 4,4m з періодом 5,366 діб.

Залежність зоряної величини цефеїди від часу t (точніше від фази φ = t/P, де P – період пульсацій) є асиметричною: порівняно швидке зростання блиску змінюється дещо сповільненим його спадом. У фазі з кривою блиску змінюється й ефективна температура зорі, а також її спектральний клас: у мінімумі блиску поверхня зорі холодніша, а її спектральний клас пізніший. До того ж ця особливість проявляється тим сильніше, чим більший період зміни блиску зорі. Так виявили залежність «період-абсолютна зоряна величина» для цефеїд. У деяких так званих s-цефеїд крива блиску має синусоїдальну форму, тобто є симетричною, амплітуда ж, як правило, не перевищує 0,5m [6; 7].

Існує три способи спостережень: спосіб «ступенів» (Аргеландера), «інтерполяційний» спосіб (Пікерінга) і комбінований спосіб (Блажко-Нейланда).

Відносно простим способом оцінки блиску зорі є спосіб візуального спостереження, суть якого полягає в наступному.

Обирається змінна зоря (позначимо її буквою v), величину блиску m_v якої необхідно визначити. У найближчому до неї околі підбирають зорі α і β постійних і відомих з каталогів [8] блисків m_α і m_β. З цими зорями і порівнюють блиск обраної для спостереження змінної зорі, здійснюючи цю оцінку в умовних одиницях – «ступенях». Зорі порівняння підбирають таким чином, щоб перша з них (наприклад, α) мала дещо більший, а друга – дещо менший блиск, ніж змінна [8; 9]. Потім визначають інтервал видимого блиску зір порівняння ($m_\beta - m_\alpha$) і число ступенів у ньому (s). Останнє робиться довільним способом залежно від досвідченості спостерігача. Наприклад, якщо в момент спостереження, блиск змінної буде на 3 ступені слабший від зорі α і на 2 ступені яскравіший від зорі β, то $s = 5$, і отриману оцінку блиску записують у вигляді:

$$\alpha 3 v 2 \beta.$$

Потім обчислюють значення інтервалу блиску зір порівняння, який відповідає одному ступеню блиску, тобто:

$$\Delta m = \frac{m_\beta - m_\alpha}{s}.$$

Після цього знаходять видиму зоряну величину змінної в момент спостереження:

$$m_v = m_\alpha + 3\Delta m, \text{ або } m_v = m_\beta - 2\Delta m. \qquad (*)$$

Після такого короткого «пропедевтичного» вступу звертаємо увагу студентів, що науково вагомі результати астрономічних досліджень отримуються внаслідок тривалих спостережень і опосередкованих вимірювань за допомогою складної телескопічної апаратури. Опрацьовуючи отримані дані, астрономам часто необхідно розв'язувати не систему подібних двох рівнянь (*), а набагато складніші задачі.

Наприклад: нехай отримані дані спостережень складають певну систему рівнянь з двома невідомими і які мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1,\\ a_2x + b_2y &= c_2,\\ a_3x + b_3y &= c_3, \qquad (1)\\ &\dots\\ a_nx + b_ny &= c_n. \end{aligned}$$

У цих рівняннях відомими із вимірів є величини a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, …, і невідомі x і y, які необхідно визначити.

Коли б ці рівняння були абсолютно точними, то для їх розв'язання достатньо було б лише двох з них, оскільки вони містять лише дві невідомі величини. Але ситуація ускладнюється тією обставиною, що кожне таке рівняння отримане з вимірювань, а будь-яке вимірювання неминуче містить випадкову похибку. Ця випадкова похибка вимірювання тим менша, чим точніший той прилад, яким користувалися при вимірюваннях. Але, навіть, найточніші вимірювання не є ідеальними (абсолютно точними).

Тому рівняння (1), які отримані із даних спостережень, називаються «умовними» і їх записують дещо інакше:

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y - c_1 = \varepsilon_1,\\ &a_2x + b_2y - c_2 = \varepsilon_2,\\ &a_3x + b_3y - c_3 = \varepsilon_3,\\ &\qquad\dots\\ &a_nx + b_ny - c_n = \varepsilon_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

де ε_1, ε_2, ε_3, …, ε_n – невідомі похибки вимірювань (спостережень).

Таку систему рівнянь розв'язати звичайними методами неможливо, оскільки вона містить $(n + 2)$ невідомих: x, y, ε_1, …, ε_n. Тому для її розв'язання застосовують зовсім інший прийом, який називається способом (методом) «найменших квадратів». Повне обґрунтування цього способу складає предмет вищої математики [4]. Ми ж, зберігаючи основну його ідею, пропонуємо методичний прийом застосування цього способу до астрономічних обчислень.

Для спрощення припустимо, що мають місце лише дві невідомі величини x і y. Обчислимо квадрат кожної з похибок ε_i і складемо їх одну з одною. Ми отримаємо суму квадратів всіх відхилень, яку позначимо буквою S:

$$S = {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + {\varepsilon_3}^2 + \dots + {\varepsilon_n}^2 = (a_1x + b_1y - c_1)^2 + (a_2x + b_2y - c_2)^2 + \dots + (a_nx + b_ny - c_n)^2. \qquad (3)$$

Природно вважати «найкращими» значеннями невідомих x і y такі значення, за яких сума квадратів похибок S буде найменшою. Такі значення називають найбільш ймовірними, а спосіб їх обчислення – способом найменших квадратів.

Дещо перетворимо вираз (3), розкривши дужки і об'єднавши подібні члени:

$$\begin{aligned} S = &({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \dots + {a_n}^2)x^2 +\\ &+({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 + \dots + {b_n}^2)y^2 +\\ &+({c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2 + \dots + {c_n}^2) +\\ &+2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)xy -\\ &-2(a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n)x -\\ &-2(b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_nc_n)y. \end{aligned} \qquad (4)$$

Для спрощення громіздкості записів введемо такі позначення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} {a_1}^2 + {a_2}^2 + \dots + {a_n}^2 &= [a \cdot a],\\ {b_1}^2 + {b_2}^2 + \dots + {b_n}^2 &= [b \cdot b],\\ {c_1}^2 + {c_2}^2 + \dots + {c_n}^2 &= [c \cdot c],\\ a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n &= [a \cdot b],\\ a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n &= [a \cdot c],\\ b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_nc_n &= [b \cdot c]. \end{aligned} \qquad (5)$$

Всі ці коефіцієнти, як відзначалося на початку, у рівняннях є відомими і за зміни x і y вони не змінюються. Вони легко вираховуються, для кожного випадку, коли відомі умовні рівняння (1). Отже,

$$S = [a \cdot a]x^2 + [b \cdot b]y^2 + 2[a \cdot b]xy - 2[a \cdot c]x - 2[b \cdot c]y + [c \cdot c]. \qquad (6)$$

Наступний крок полягає у тому, щоб знайти такі значення x і y, щоб S було найменшим.

Спочатку змоделюємо простішу задачу. Нехай деяка величина ω залежить від змінної величини z наступним чином

$$\omega = \alpha z^2 + 2\beta + \gamma, \qquad (7)$$

і необхідно знайти найменше значення ω.

Виділимо в (7) повний квадрат

$$\omega = \left(\sqrt{\alpha z} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}. \qquad (8)$$

Значення ω буде мати найменше значення, коли вираз у дужках (8) дорівнюватиме нулеві; звідси випливає, що

$$\alpha z + \beta = 0. \qquad (9)$$

Повертаючись до вирішення нашої основної задачі, записуємо величину S наступним чином:

$$S = [a \cdot a]x^2 + 2\{[a \cdot b]y - 2[a \cdot c]\}x + \{[b \cdot b]y^2 - 2[b \cdot c]y + [c \cdot c]\}. \qquad (10)$$

Залишаючи у (10) y незмінним, легко переконуємося у тому, що S набуває найменшого значення при x, яке задовольняє, аналогічно з (9), рівняння

$$[a \cdot a]x + [a \cdot b]y - [a \cdot c] = 0. \qquad (11)$$

Рівняння (11) називається «першим нормальним рівнянням». Аналогічно, покладаючи незмінним x і визначаючи найменше значення S за змінного y, отримаємо «друге нормальне рівняння»:

$$[a \cdot b]x + [b \cdot b]y - [b \cdot c] = 0. \qquad (12)$$

Отже, найбільш ймовірні значення x і y, за яких S має найменше значення, отримується із системи двох нормальних рівнянь

$$\begin{cases} [a \cdot a]x + [a \cdot b]y - [a \cdot c] = 0,\\ [a \cdot b]x + [b \cdot b]y - [b \cdot c] = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Ця система рівнянь розв'язується звичайними прийомами алгебри.

Повний розвиток способу найменших квадратів дає можливість вираховувати не лише ймовірні значення невідомих величин x і y, але і їх ймовірних похибок. Його можна узагальнити й на такі умовні рівняння, які містять будь-яку кількість невідомих величин x, y, z, …

Продемонструємо це на конкретному прикладі з астрономії.

Нехай із спостережень за блиском зірок отримана ступенева шкала: $d = 0^S{,}0$; $c = 3^S{,}7$; $b = 7^S{,}8$; $a = 16^S{,}6$. Виявилося також можливим отримати із джерел [6; 9] зоряні величини:

m_d = 9,56; m_c = 9,30; m_b = 9,00; m_a = 8,53. Необхідно знайти формулу, яка пов'язує ступені і зоряні величини. Позначаючи величину ступеня через s, а зоряну величину, яка відповідає блиску 0,0 ступенів – через m_0, можна записати загальний вигляд такої формули

$$m_{спост.} = m_0 - n \cdot s, \quad (14)$$

де n – число ступенів, що вимірюють блиск даної зірки в отриманій шкалі. Дійсно, для того щоб отримати зоряну величину, яка відповідає n-му ступеню, необхідно помножити n на s і відняти цей добуток від зоряної величини m_0. Використовуючи наші дані, отримуємо систему рівнянь:

для зорі d: $m_0 - 0{,}0 \cdot s = 9{,}56$,
для зорі c: $m_0 - 3{,}7 \cdot s = 9{,}30$,
для зорі b: $m_0 - 7{,}8 \cdot s = 9{,}00$,
для зорі a: $m_0 - 16{,}6 \cdot s = 8{,}53$. (15)

Всі ці рівняння отримані із спостережень і тому не є точними, через це їх і називають умовними. Тож необхідно скласти нормальні рівняння і розв'язати їх відносно невідомих m_0 і s. Для цього складаємо колонки коефіцієнтів:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1; & b_1 = 0{,}0; & c_1 = 9{,}56; & b_1^2 = 0{,}0; \\ a_2 = 1; & b_2 = -3{,}7; & c_2 = 9{,}30; & b_2^2 = 13{,}69; \\ a_3 = 1; & b_3 = -7{,}8; & c_3 = 9{,}00; & b_3^2 = 60{,}84; \\ a_4 = 1; & b_4 = -16{,}6; & c_4 = 8{,}53; & b_4^2 = 275{,}56; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a_1b_1 = 0{,}0; & a_1c_1 = 9{,}56; & b_1c_1 = 0{,}00; \\ a_2b_2 = -3{,}7; & a_2c_2 = 9{,}30; & b_2c_2 = -34{,}41; \\ a_3b_3 = -7{,}8; & a_3c_3 = 9{,}00; & b_3c_3 = -70{,}20; \\ a_4b_4 = -16{,}6; & a_4c_4 = 8{,}53; & b_4c_4 = -141{,}68. \end{array} \quad (16)$$

Сумуючи коефіцієнти, отримуємо:

$$[a \cdot a] = 4; [a \cdot b] = -28{,}1; [c \cdot c] = 36{,}39; [b \cdot c] = -246{,}24; [b \cdot b] = 350{,}09. \quad (17)$$

Дещо заокругливши коефіцієнти, отримуємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} 4m_0 - 28{,}1s = 36{,}39, \\ -28{,}1m_0 + 350{,}1s = -246{,}2. \end{cases} \quad (18)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо: m_0 = 9,53, s = 0,0615. Тож ймовірна формула має вигляд:

$$m = 9{,}53 - 0{,}0615n. \quad (19)$$

Підставляючи спостережні значення n в (19), отримаємо виправлені значення зоряних величин зірок порівняння у відповідності зі шкалою. Для наочності зводимо всі дані в одну таблицю:

зоря	ступінь	m з каталогу	m зі шкали	різниці ($m_{кт} - m_{шк}$)
d	0,0	9,56	9,53	– 0,03
c	3,7	9,30	9,30	0,00
b	7,8	9,00	9,05	+ 0,05
a	16,6	8,53	8,51	– 0,02

Якщо обчислення виконані вірно, то сума всіх різниць, які представлені в останній колонці таблиці, повинна бути рівною нулеві. У нашому випадку саме так воно і є.

Отже, ми можемо користуватися формулою для перетворення ступенів у зоряні величини і замість зоряних величин зірок порівняння, взятих з астрономічних каталогів, використати зоряні величини, отримані із власної шкали.

Ми навели один з часткових прикладів використання способу найменших квадратів. Проте він широко застосовується й при розв'язанні інших астрономічних задач. Наприклад, аналогічні обчислення проводяться за уточнення значень періодів змінних зірок, про що мова йтиме далі у формі завдання студентам для самостійної роботи.

Вище ми відзначали, що невідомі величини (x, y), які входять до умовних рівнянь, теж можуть мати ймовірні похибки. Наведемо спосіб їх обчислення.

Для цього необхідно підставити отримані значення невідомих у всі умовні рівняння і знайти їх залишкові відхилення Δ. У попередньому прикладі вони представлені у колонці «різниці». Потім необхідно знайти суму квадратів цих відхилень [Δ·Δ]. У нашому випадку вона дорівнює

$$[\Delta \cdot \Delta] = 0{,}0038.$$

Отриману суму необхідно поділити на кількість рівнянь n, з якої віднімається кількість невідомих величин k. У нашому випадку кількість рівнянь n = 4, а кількість невідомих величин k = 2. Поділивши [Δ·Δ] = 0,0038 на $n - k$ = 2, отримуємо величину

$$\frac{[\Delta \cdot \Delta]}{n-k} = \frac{0{,}0038}{2} = 0{,}0019.$$

З цієї величини необхідно добути квадратний корінь, і ми отримаємо так звану питому похибку або «похибку одиниці ваги». У даному випадку вона дорівнює:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{[\Delta \cdot \Delta]}{n-k}} = \sqrt{0{,}0019} = 0{,}044.$$

Для того, щоб знайти квадратичні похибки невідомих величин, необхідно розв'язати такі рівняння:

$$\begin{array}{ll} A_x[a \cdot a] + K[a \cdot b] = 1, & M[a \cdot a] + A_y[a \cdot b] = 0, \\ A_x[a \cdot b] + K[b \cdot b] = 0, & M[a \cdot b] + A_y[b \cdot b] = 1 \end{array} \quad (20)$$

і визначити з них величини A_x і A_y (K і M визначати не потрібно). У нашому прикладі, рівняння які необхідно розв'язати, набувають вигляду:

$$4A_x - 28{,}1K = 1, \quad -28{,}1A_x + 350{,}1K = 0, \quad \text{і} \quad 4M - 28{,}1A_y = 0, \quad -28{,}1M + 350{,}1A_y = 1. \qquad (21)$$

Розв'язавши систему (21), отримуємо величини:

$A_x = 0{,}16$; $A_y = 0{,}0050$; $\sqrt{A_x} = 0{,}4$; $\sqrt{A_y} = 0{,}07$.

Квадратичні похибки невідомих визначаються із формул:

$\sigma_x = \sigma_0\sqrt{A_x} = 0{,}044 \cdot 0{,}4 = 0{,}018 \approx 0{,}02$,

$\sigma_y = \sigma_0\sqrt{A_y} = 0{,}044 \cdot 0{,}07 = 0{,}0031$.

Отже, розв'язок наших умовних рівнянь має вигляд:

$x = m_0 = 9{,}53 \pm 0{,}02$; $y = s = 0{,}0615 \pm 0{,}0031$,

і формула часто записується у такому вигляді:

$m = 9{,}53 - 0{,}0615s \pm 0{,}02 \pm 0{,}0031$. (22)

Як вказувалося вище, закон зміни блиску тієї чи тієї зорі характеризується її елементами, одним з основних яких є період. Якщо змінна зірка змінює свій блиск періодично, то зміна її блиску буде повторюватися через певний проміжок часу, який і називають періодом.

Припустимо, що із спостережень затменно-змінної зорі ми визначили два моменти сусідніх мінімумів T_1 і T_2. Тоді, отримавши їх різницю, знаходимо величину її періоду $P = T_2 - T_1$. Отже, вважаємо, що явище відбувається строго періодично і його період нами встановлений. Позначимо початковий момент через T_0. Нехай до даного моменту пройшло ціле число періодів N. Тоді цей момент T_N визначиться за формулою

$T_N = T_0 + P \cdot N$. (23)

Якщо формула (23) періоду зірки відома, то з її допомогою можна передбачити той момент, коли буде відбуватися максимум чи мінімум, в залежності від відомого моменту – T_0. Такий перелік (список) моментів мінімумів (або максимумів) називається «ефемеридою».

Практика показує, що як правило, спостережні і аналітично обчислені моменти мінімуму (або максимуму) періоду не співпадають. Різниця $T_{спост} - T_{обчисл} = 0 - C$ називається поправкою ефемериди (позначення $0 - C$ зазвичай використовується для різниці спостережного і обчисленого значень будь-якої величини).

Якщо період змінної зорі постійний, то поправка ефемериди виникає внаслідок недостатньо точного визначення величини періоду, яка входить до формули (23). Тому виникає необхідність уточнити величину періоду.

Нехай дійсне значення періоду P, а відоме нам неточне його значення P_1. Тоді $P - P_1 = \Delta P$ – поправка періоду і $P = P_1 + \Delta P$. Підставимо це значення у точну формулу (23):

$T_N = T_0 + P \cdot N = T_0 + (P_1 + \Delta P) \cdot N = T_0 + P_1 \cdot N + \Delta P \cdot N$,

але $T_0 + P_1 \cdot N = T_{обчисл}$ – це обчислене значення моменту, тоді як $T_N = T_{спост}$ є його спостережне значення. Тоді $T_{спост} = T_{обчисл} + \Delta P \cdot N$, звідки $T_{спост} - T_{обчисл} = N \cdot \Delta P = 0 - C$.

Отже, $\Delta P = \frac{0-C}{N}$. (24)

Значний інтерес представляє покращення елементів за даними тривалого спостереження зірок. За такого підходу намагаються використати всі дані, отримані у будь-який момент спостереження пропонованої зорі.

Для кожного отриманого моменту мінімуму складають рівняння типу

$\Delta T_0 + N \cdot \Delta P = 0 - C$, (25)

де ΔT_0 – похибка визначення моменту початкового мінімуму T_0, а ΔP – поправка періоду.

Склавши низку таких рівнянь (які називають умовними), їх розв'язують за способом найменших квадратів і знаходять невідомі величини ΔT_0 і ΔP, як у попередньому прикладі – x і y. Це й складає самостійне завдання студентам з матеріалу даної теми.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розвідок напряму.

Наш досвід засвідчує, що оволодіння методами і прийомами використання математичного апарату у астрономічних дослідженнях дає змогу суттєво підвищити ефективність засвоєння здобувачами освіти теоретичних положень сучасної астрономії та астрофізики, істотно впливає на ступінь сформованості високої внутрішньої та зовнішньої мотивації здобуття знань, значно посилює доказовість результатів власне класичних природничих досліджень, сприяючи формуванню сучасного наукового стилю мислення здобувачів освіти та підвищує їх інтерес до вивчення фундаментальних наук.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Загальна астрономія : підручник / С.М. Андрієвський та ін. Харків : ПромАрт, 2019. 524 с.
2. Пришляк М.П., Кравцова О.М. Астрономія (профільний рівень, за навчальною програмою авторського колективу під керівництвом Яцківа Я.С.) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 160 с.
3. Астрономія : підручник для фізико-математичних факультетів педінститутів. 2-е вид., переробл. і доп. / Ю.К. Гулак та ін. Київ : Вища школа, 1976. 320 с.
4. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика. Київ : ВПЦ Київський університет, 2007. 504 с.
5. Мислінчук В.О., Тищук В.І., Левшенюк В.Я. Фізика зір. Комплексне довгострокове завдання з астрономії. Рівне : РВВ РДГУ, 2009. 130 с.
6. Цефеїди. *Астрономічний енциклопедичний словник* / за заг. ред. І.А. Климишина та А.О. Корсунь. Львів : Головна астрономічна обсерваторія НАН України; Львівський національний університет ім. Івана Франка, 2003. С. 518.
7. Чепрасов В.Г. Практикум з курсу загальної астрономії. Київ : Радянська школа, 1967. 192 с.
8. Fundamental Astronomy. 6th Edition / ed. by H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K.J. Donner. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2016. 550 p.

9. Soszyński I., Udalski A., Szymański M.K., Kubiak M., Pietrzyński G., Wyrzykowski Ł., Szewczyk O., Ulaczyk K., Poleski R. The Optical Gravitational Lensing Experiment. The OGLE-III Catalog of Variable Stars. II. Type II Cepheids and Anomalous Cepheids in the Large Magellanic Cloud. *Acta Astronomica*. 2008. Vol. 58. P. 293—312.

REFERENCES

1. Andriievskyi, S.M., Kuzmenkov, S.H., Zakhozhai, V.A., & Klymyshyn, I.A. (2019). Zahalna astronomiia [General astronomy]. PromArt. [in Ukrainian].
2. Pryshliak, M.P., & Kravtsova, O.M. (2019). Astronomiia (profilnyi riven, za navchalnoiu prohramoiu avtorskoho kolektyvu pid kerivnytstvom Yatskiva Ya.S.) [Astronomy (profile level, according to the curriculum of the author's team under the leadership of Yatskiv Ya.S.)].Vydavnytstvo «Ranok». [in Ukrainian].
3. Hulak, Yu.K., Boiarchenko, I.X., Razdymakha, I.S., & Sandakova, Ye.V. (1976). Astronomiia : pidruchnyk dlia fizyko-matematychnykh fakultetiv pedinstytutiv. (2 vydannia) [Astronomy : a textbook for physical and mathematical faculties of pedagogical institutes. (2nd edition)]. Vyshcha shkola. [in Ukrainian].
4. Kartashov, M.V. (2007). Imovirnist, protsesy, statystyka [Probability, processes, statistics]. VPTs Kyivskyi universytet. [in Ukrainian].
5. Myslinchuk, V.O., Tyshchuk, V.I., & Levsheniuk, V.Ia. (2009). Fizyka zir. Kompleksne dovhostrokove zavdannia z astronomii [Physics of stars. A complex long-term task in astronomy]. RVV RDHU. [in Ukrainian].
6. Klymyshyn, I.A., & Korsun, A.O. Tsefeidy [Cepheids]. In I.A., Klymyshyn, & A.O., Korsun (Eds.), Astronomichnyi entsyklopedychnyi slovnyk [Astronomical encyclopedic dictionary] (p. 518). Holovna astronomichna observatoriia NAN Ukrainy; Lvivskyi natsionalnyi universytet im. Ivana Franka. [in Ukrainian].
7. Cheprasov, V.H. (1967). Praktykum z kursu zahalnoi astronomii [Practicum on the course of general astronomy]. Radianska shkola. [in Ukrainian].
8. Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K.J. (Eds.). (2016). Fundamental Astronomy (6th Edition). Springer. [in English].
9. Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M.K., Kubiak, M., Pietrzyński, G., Wyrzykowski, Ł., Szewczyk, O., Ulaczyk, K., & Poleski, R. (2008). The Optical Gravitational Lensing Experiment. The OGLE-III Catalog of Variable Stars. II. Type II Cepheids and Anomalous Cepheids in the Large Magellanic Cloud. Acta Astronomica, 58, 293—312. [in English].

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ТКАЧЕНКО Ігор Анатолійович – доктор педагогічних наук, професор кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Наукові інтереси: теорія та методика навчання природничих наук.

КРАСНОБОКИЙ Юрій Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Наукові інтереси: теорія та методика навчання природничих наук.

ІЛЬНІЦЬКА Катерина Сергіївна – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

Наукові інтереси: теорія та методика навчання природничих наук.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

TKACHENKO Igor Anatoliyovych – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University.

Circle of research interests: theory and methods of teaching natural sciences.

KRASNOBOKY Yuriy Mykolayovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University.

Circle of research interests: theory and methods of teaching natural sciences.

ILNITSKA Kateryna Serhiivna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University.

Circle of research interests: theory and methods of teaching natural sciences.

Стаття надійшла до редакції 30.01.2024 р.

УДК 378.09
DOI: 10.36550/2415-7988-2024-1-212-67-71

УСОВ Валентин Валентинович –
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри технологічної та професійної освіти
Південноукраїнського національного педагогічного університету
імені К. Д. Ушинського
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7855-5370
e-mail: valentinusov67@gmail.com

СУЧАСНІ КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ДИЗАЙНІ ОДЯГУ

У даній статті проаналізована якість підготовки здобувачів вищої освіти зі спеціальності «015 Професійна освіта (Дизайн)» в Університеті Ушинського. Показано, що мають місце певні недоліки практичної складової у підготовленості. Запропоновано шляхи покращення підготовки на основі партнерства між різними стейкхолдерами, а також на основі партнерського управління підготовкою викладачів професійної освіти програми «ERASMUS+». Одним з