

4. Huzhva, V. (2019). Tsyfrova transformatsiia universytetiv [Digital transformation of universities]. *Skhidna Yevropa: ekonomika, biznes ta upravlinnia*. № 4 (21). [in Ukrainian]
5. Gyrevich, R., Konoshevskiy, L., Opushko, N. (2022). Tsyfrovizatsiia osvity suchasnoho suspilstva: problemy, dosvid, perspektyvy [Digitalization of education in the modern society: problems, experience, prospects]. *Educological discourse*. Vol. 3–4 (38–39). [in Ukrainian]
6. Karpliuk, S.O. (2019). Osoblyvosti tsyfrovizatsii osvitnoho protsesu u vyshchii shkoli [Peculiarities of digitization of the educational process in higher education]. *Informatsiino-tyfrovoyi osvitniy prostir Ukrainy: transformatsiini protsesy i perspektyvy rozvytku: materialy metodolohichnoho seminaru NAPN Ukrainy*. [in Ukrainian]
7. Kontseptsiiia tsyfrovoyi transformatsii osvity i nauky : MON zaprosuie do hromadskoho obhovorennia (2021). [The concept of digital transformation of education and science: the Ministry of Education and Science invites to public discussion.]. URL: <https://mon.gov.ua/ua/news/koncepciya-cifrovoyi-transformaciyosviti-i-nauki-mon-zaprosuie-do-gromadskogo-obgovorennia>. [in Ukrainian]
8. Sachaniuk-Kavetska, N.V., Maiatina, N.V., Novak, O.M. (2021). Tsyfrova pedahohika u konteksti pidvyshchennia yakosti osvitanikh posluh [Digital pedagogy in the context of improving the quality of educational services]. *Naukovyi chasopys NPU imeni M.P. Drahomanova. Serii 5. Pedahohichni nauky: realii ta perspektyvy*. Vol. 80 (2). [in Ukrainian]

9. Bilyakovska, O., Horuk, N., Karamanov, O. (2023). Educational Environment: Accessibility and Safety. *Studies in Comparative Education*. № 2. [in Ukrainian]
10. Chen, F., Gorbunova, N., Masalimova, A., Bírová, J. (2017) Formation of ICT-Competence of Future University School Teachers. *EURASIA. Journal of Mathematics Science and Technology Education*. Vol. 13 (8). P. 4765–4777. [in English]
11. Kashora, T., van der Poll, H. M., van der Poll, J. A. (2016). E-Learning Technologies for Open Distance Learning Knowledge Acquisition in Management Accounting. *Africa Education Review*. Vol. 13 (1). P. 1–19. [in English]

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

БІЛЯКОВСЬКА Ольга Орестівна – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри загальної педагогіки та педагогіки вищої школи Львівського національного університету імені Івана Франка.

Наукові інтереси: проблеми якості освіти, професійна підготовка майбутніх фахівців.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

BILYAKOVSKA Olha – doctor of pedagogical sciences, professor, professor of the department of general pedagogy and pedagogy of higher education of the Ivan Franko University of Lviv.

Scientific interests: quality of education, professional training of future specialists.

Стаття надійшла до редакції 13.07.2023 р.

УДК 510(072) (045)

DOI: 10.36550/2415-7988-2023-1-210-14-21

БОТУЗОВА Юлія Володимирівна –

доктор педагогічних наук, доцент кафедри математики та методики її навчання

Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1313-0010>

e-mail: vassalatii@gmail.com

НІЧИШИНА Вікторія Вікторівна –

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та методики її навчання

Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3771-1589>

e-mail: vika.nichishina@ukr.net

ВНУТРІШНЬОПРЕДМЕТНА ІНТЕГРАЦІЯ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ (НА ПРИКЛАДІ ІНТЕГРАЦІЇ АЛГЕБРАЇЧНОГО ТА ГЕОМЕТРИЧНОГО МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ)

У статті обґрунтовано важливість інтеграції навчальних предметів алгебри та геометрії в процесі навчання математики в школі. Це питання сьогодні є актуальним і пріоритетним. Про це йдеться в Концепції розвитку природничо-математичної освіти в Україні, а також на сучасному етапі реалізації Концепції «Нова українська школа». Зокрема, у цих Концепціях наголошується на ефективності інтегрованих уроків, які можна проводити у двох напрямках: поєднання подібних тем кількох навчальних предметів; формування інтегрованих курсів або окремих спецкурсів шляхом поєднання навчальних програм таких предметів. Принцип інтеграції реалізується на двох рівнях: внутрішньопредметному та міжпредметному. У процесі вивчення математичних дисциплін внутрішньопредметний рівень виявляється під час виконання завдань, які об'єднують, наприклад, алгебру та геометрію. Це сприяє формуванню в учнів цілісного, системного світогляду, актуалізації особистісного ставлення до питань, що розглядаються на уроках, а також забезпеченню наступності у викладанні математичних дисциплін.

Автори досліджують можливість використання інтегрованого підходу до вивчення математики, який сприяє

розвитку не лише систематизованих, цілісних математичних знань, а й загальних пізнавальних умінь учнів. Зокрема, йдеться про здібності, що дозволяють опрацьовувати математичну інформацію. При цьому синтезується вміння аналізувати, оцінювати, зберігати інформацію, здобувати знання, порівнювати та визначати раціональні напрямки навчальної діяльності. Як наслідок, використання внутрішньопредметної інтеграції є засобом підвищення мотивації учнів та глибшого розуміння математики.

У статті наведена серія задач на обчислення та доведення, в яких даються пояснення та детально розглядається процес взаємодії між алгебраїчним та геометричним методами розв'язування задач і встановлюються спільні залежності між ними. За допомогою сучасного програмного засобу навчання математики GeoGebra здійснена візуалізація пропонованого матеріалу.

У результаті дослідження зроблено висновок про підвищення якості математичної освіти учнів на основі внутрішньопредметної інтеграції, зокрема, у процесі вивчення алгебри та геометрії.

Ключові слова: інтегративний підхід, внутрішньопредметна інтеграція, алгебраїчний метод, геометричний метод, методика навчання математики.

BOTUZOVA Yuliia Volodymyrivna –

doctor of pedagogical sciences, associate professor of the department of mathematics and methods of teaching math of Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1313-0010>
e-mail: vassalatii@gmail.com

NICHYSHYNA Victoriya Victorivna –

candidate of pedagogical sciences, associate professor of the department of mathematics and methods of teaching math of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3771-1589>
e-mail: vika.nichishina@ukr.net

INTRA-SUBJECT INTEGRATION IN SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHING (ON THE EXAMPLE OF INTEGRATION OF ALGEBRAIC AND GEOMETRIC PROBLEM SOLVING METHODS)

In general, the article substantiates the importance of applying the integration of algebra and geometry in the process of teaching mathematics in secondary school. This issue is relevant and a priority today. This is stated in the Concept of Development of Science and Mathematics Education in Ukraine as a whole. It is also relevant at the current stage of implementation of the Concept of the "New Ukrainian School". In particular, these Concepts emphasize the effectiveness of integrated lessons, which can be conducted in two ways: combining similar topics of several educational subjects; formation of integrated courses or individual special courses by combining curricula of such subjects. The principle of integration (interdisciplinary connections) is implemented at two levels: intra-subject and inter-subject. In the process of learning mathematical disciplines, the internal subject level is revealed during tasks that integrate, for example, algebra and geometry. This will contribute to the formation of a holistic, systemic worldview in students, actualization of personal attitude to the issues discussed in the lesson, as well as ensuring the continuity of teaching mathematical disciplines.

The authors explore the possibilities of using an integrated approach to the study of mathematics, which contributes to the development of not only systematic, integral mathematical knowledge, but also general cognitive skills of students, in particular, it is about abilities that allow processing mathematical information that students receive. At the same time, the ability to analyze, evaluate, store information, recall, acquire knowledge, compare and determine rational directions of educational activity is synthesized. As a result, the use of intra-subject integration is a means of increasing students' motivation and deeper understanding of mathematics.

A series of calculation and proof problems are given, in which explanations are given and the process of interaction between algebraic and geometric methods of problem solving is considered in detail and common dependencies between them are established.

With the help of modern software tools for teaching mathematics, the proposed material is visualized with the help of dynamic models. One of these software tools is GeoGebra.

As a result of the study, a conclusion was made about the improvement of the quality of secondary school students' mathematics education based on intra-subject integration, in particular, in the process of studying algebra and geometry.

Key words: integrative approach, internally subject integration, algebraic method, geometric method, methods of teaching math.

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Інтеграція математичних знань є однією з актуальних проблем шкільної математичної освіти на сучасному етапі імплементації Концепції «Нової української школи».

Поняття «інтеграція» відповідно до трактування представленого у «Енциклопедії

сучасної України» [11] – об'єднання будь-яких елементів в одне ціле, а також поєднання та координація дій різних частин цілісної системи; процес взаємного зближення і взаємодії окремих структур. У навчанні «інтеграцію» найчастіше розуміють як взаємопроникнення та взаємозв'язок змісту різних навчальних дисциплін. Щодо навчання математики в основній школі, де

вивчаються дві математичні дисципліни: алгебра та геометрія, – то особливо важливим є формування цілісних уявлень здобувачів освіти про математику як науку.

У Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) зазначено, що в інтегративному підході реалізації STEM-освіти вагомим місцем належить математиці, а саме послідовному, ґрунтовному, якісному її викладанню.

Інтегровані уроки є особливою формою наскрізного STEM-навчання. Вони спрямовані на встановлення міжпредметних зв'язків, що сприяють формуванню в учнів цілісного, системного світогляду, актуалізації особистісного ставлення до питань, що розглядаються на уроці, а також забезпеченню наступності навчання математичних дисциплін (інтегративна функція наступності, що діє за «горизонталлю»). Інтегровані уроки можуть проводитись двома шляхами: об'єднання схожої тематики кількох навчальних предметів; формування інтегрованих курсів або окремих спецкурсів шляхом об'єднання навчальних програм таких предметів. Основою ефективності зазначених уроків є чітке визначення мети й відповідне їй планування для забезпечення різнобічного розгляду учнями предмета дослідження.

Принцип інтеграції (міжпредметних зв'язків) реалізується на двох рівнях: внутрішньопредметному та міжпредметному. У процесі вивчення математичних дисциплін внутрішньопредметний рівень виявляється під час виконання завдань, у яких інтегруються, наприклад, алгебра та геометрія або ж математичний аналіз та диференціальна геометрія тощо). Міжпредметні зв'язки задіюють міждисциплінарну інтеграцію, коли вирішуються задачі (найчастіше прикладного або практичного змісту), що вимагають знань з кількох предметних галузей, як-от математика та фізика або ж математика та економіка тощо. У ракурсі презентованого дослідження важливим виявилось встановлення внутрішньопредметних зв'язків між шкільним курсом математики та курсами математичних дисциплін, які вивчають у ЗВО педагогічного профілю, а також сприяти подальшій реалізації міжпредметних зв'язків у процесі вивчення математичних дисциплін, особливо під час розв'язування практикоорієнтованих задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Питання інтеграції у навчанні математики досліджують як шкільні вчителі різних освітніх рівнів – початкової, основної, старшої школи та викладачі математики ЗВО України, так і вчителі та викладачі інших країн.

Зокрема, Сімон Д. Сангвін у своїй статті [5] досліджує процес інтегрованого навчання математики та ділиться власним досвідом

викладання математики у контексті інтегрованого підходу. Також автор розмірковує про те, наскільки інтеграція математики може стати частиною шкільної програми і чи не поставить це під загрозу математику як окремий предмет вивчення в школі. У результаті свого дослідження автор робить висновок про те, що інтеграція математики має великий потенціал у підвищенні зацікавленості, мотивації та розуміння математики учнями.

Автори статті [4] Сьюзен Розенфілд, Елізабет Флойд та Лорі Свіг також наголошують на можливостях використання інтеграції математики з іншими дисциплінами як засобу підвищення мотивації та підвищення розуміння математики з боку учнів. Вони пропонують різні методи та приклади інтеграції математики з іншими дисциплінами, такі як робота з геометричними фігурами у мистецькій творчості або створення табличок з даними у соціальних науках.

Стаття [3] містить дослідження ефективності програми для професійного розвитку вчителів з інтегрованого навчання математики та інших дисциплін у молодшій школі. Відповідно до програми, вчителям пропонувалося здійснити спільне планування уроків математики та інших дисциплін, спільне проведення уроків, розробити презентації теми цілісним способом та був здійснений моніторинг і оцінка цих видів діяльності. В результаті автори дійшли висновку про те, що така програма є успішним засобом підвищення якості навчання математики в молодшій школі та надали рекомендації для практичної реалізації подібних програм.

Дослідження авторів статті [2] полягає у аналізі ефективності використання інтегрованого підходу на STEAM-уроці, зокрема, вивчаючи геометрію із застосуванням фізики. Дослідження включало в себе повний цикл планування, проведення та оцінювання уроку. Автори провели аналіз результатів тестування знань учнів після проведення уроку та зробили висновок, що інтегрований підхід до навчання математики в міждисциплінарному контексті має потенціал для підвищення мотивації та розуміння учнів.

Вітчизняні вчителі та науковці також досліджують можливості впровадження інтеграції у процесі навчання математики. Зокрема, дослідники даного питання вбачають великий потенціал для глибшого розуміння учнями та студентами математичного матеріалу у внутрішньопредметній інтеграції математики.

Отже, автор статті [15] Л.М. Ковалева досліджує взаємозв'язок між курсом математики та курсом геометрії в основній школі. Вона, зокрема, розглядає методи навчання, зміст курсів і взаємозв'язок між ними та, розглядаючи різні підходи до вивчення математики та геометрії в основній школі, наголошує на ефективності

інтегрованого підходу, зосереджуючи увагу на задачах. У статті також надаються приклади тем, які можуть бути інтегровані між курсами математики та геометрії.

Автори М.К. Лаврик та І.Я. Шамсієва розглядають проблему інтеграції алгебри та геометрії у підготовці майбутніх учителів математики. У статті [16] наголошується на необхідності формування інтегрованого курсу «Алгебра і геометрія», що дозволить краще узгодити матеріал з даних предметів. Автори пропонують створення нової системи контролю й оцінювання, включення до курсу педагогічної практики інтегрованого курсу «Алгебра і геометрія». Крім цього, наводяться конкретні приклади завдань та методів, які можуть бути використані у цьому інтегрованому курсі «Алгебра і геометрія».

Автор статті «Інтеграція алгебри та геометрії в навчальному процесі старшої школи» [14] Н.В. Калачова наголошує на необхідності такої інтеграції, оскільки це сприяє поліпшенню розуміння математичних концепцій та знижує рівень відчуження учнів від математики. У статті розглядається ряд прикладів і методик, які можна використовувати з метою інтеграції геометрії та алгебри. Наприклад, це може бути використання геометричного різноманіття в алгебрі, заміна складних алгебраїчних формул на їх відображення у вигляді геометричних фігур, пов'язаних з кожною операцією. Крім цього, автор надає деякі поради щодо організації навчального процесу, які допоможуть вчителям ефективно реалізувати інтегровану форму викладання.

Питання інтеграції курсів «Алгебра» та «Геометрія» у збалансованому викладанні математики у загальноосвітніх школах розглядає автор дослідження «Інноваційні підходи до інтеграції курсів «Алгебра» та «Геометрія» у ЗНЗ» [20] І.М. Штекіна. Дослідниця дає огляд інноваційних підходів та методів, які можуть бути використані для інтеграції курсів «Алгебра» та «Геометрія», таких як використання інтерактивних методів навчання, технологій візуалізації матеріалу, проектної діяльності тощо. Окрім цього, автор акцентує увагу на важливості диференційованого підходу до викладання матеріалу, зокрема, до інтегрованого курсу «Алгебра і геометрія», залежно від рівня знань та здібностей учнів.

Проте, на сьогоднішній день питання внутрішньо-предметної інтеграції математики в ЗСО недостатньо розроблене, з чого випливає актуальність пропонованого дослідження.

Метою статті є показати можливості та користь інтеграції алгебри та геометрії у процесі навчання математики в основній школі, продемонструвавши застосування такої інтеграції у процесі розв'язування задач на обчислення та доведення.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Задача 1. Не розв'язуючи систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16; \\ y^2 + z^2 = 48; \\ y^2 - xz = 0; \end{cases}$ обчисліть $xu + uz$, при умові, що $x, y, z > 0$ [1].

Розв'язання: аналізуючи вигляд системи та умову задачі, яка полягає в тому, що розв'язувати систему звичними методами підстановки або додавання не слід, звернемося до геометричної ілюстрації. Перше рівняння системи – «сума квадратів двох додатних чисел дорівнює 16», – дозволяє припустити, що є деякий прямокутний трикутник з катетами x, y та гіпотенузою довжиною 4 (од.). Одночасно з цим, друге рівняння системи – «сума квадратів двох додатних чисел дорівнює 48», – це продовжує наше припущення про існування іншого прямокутного трикутника з катетами y, z та гіпотенузою довжиною $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. При цьому ці трикутники мають спільний катет – y .

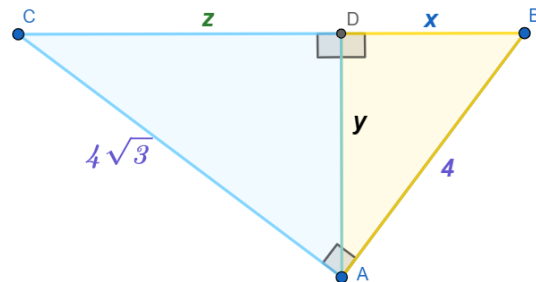


Рис.1. Геометрична модель системи рівнянь

Зобразимо ці трикутники (рис.1), позначивши відповідним чином сторони трикутника ADB та трикутника ADC: $BD=x, AD=y, DC=z, AB=4, AC=4\sqrt{3}$. При цьому утворився великий трикутник ABC.

Враховуючи третє рівняння системи $y^2 - xz = 0$ або те саме, що $y^2 = xz$, маємо – «квадрат висоти трикутника, опущеної з вершини A на сторону BC, дорівнює добутку проєкцій сторін AB та AC на BC». Це можливо за умови, що кут A трикутника ABC прямий, тоді виконується теорема про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику [13, с.96]. Тепер усі умови, поміщені в систему виконуються.

Користуючись рис.1, бачимо, що значення виразу $xu + uz$, яке необхідно порахувати є вдвічі збільшеною сумою площ трикутників ADB та ADC: $S_{\triangle ADB} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yz = \frac{1}{2}(xy + yz)$. Але склавши площі $S_{\triangle ADB} + S_{\triangle ADC}$ цих двох трикутників, отримає площу великого трикутника ABC: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle ADC}$. Знаючи катети трикутника ABC, обчислимо його площу: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$. Таким чином, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}(xy + yz) = 8\sqrt{3}$. Звідси слідує,

що $xу + yz = 16\sqrt{3}$.

Відповідь: $xу + yz = 16\sqrt{3}$.

Розглянемо більш типову задачу, яка зустрічається в підручниках геометрії для 9 класу ЗЗСО [18, с.10] та у підручниках алгебри [7, с.159] або математики [17, с.75] для 10 класу.

Задача 2. Знайдіть: $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

Розв'язання: для цілісного сприйняття тригонометрії, як науки, що пов'язує алгебру та геометрію доцільно розглядати 2 способи розв'язування цієї задачі – алгебраїчний або за допомогою формул та геометричний.

I спосіб (алгебраїчний): з основної тригонометричної тотожності утворюються рівності-наслідки, зокрема $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ або $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, де вибір знаку залежить від величини кута α , що задана в умові. До речі для 9-класників, які вивчають значення синусів, косинусів та тангенсів кутів від 0° до 180° відомо, що значення синусів таких кутів лише невід'ємне, а тому знак мінус у попередній формулі вони не використовують. Він стає актуальним для 10-класників, які вивчають значення тригонометричних функцій будь-якого дійсного числового аргументу. Таким чином, враховуючи умову, яка говорить про те, що кут α – гострий, знаходимо:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

II спосіб (геометричний): знаючи, що $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, побудуємо відповідний прямокутний трикутник з гострим кутом α (рис. 2).

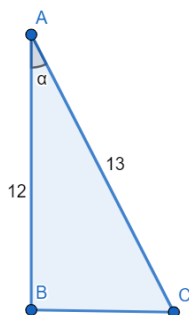


Рис.2. Прямокутний трикутник, у якого $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

Вивчені у попередньому (8 класі) тригонометричні співвідношення у прямокутному трикутнику дозволяють встановити, що катет прилеглий до кута α має дорівнювати 12 од, а гіпотенуза відповідно 13 од. Для того, щоб відшукати синус кута α необхідно знати довжину протилежного до нього катета. Знайдемо його за теоремою Піфагора: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ (од.). Отже, шуканий синус дорівнює: $\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$.

Відповідь: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

Презентований підхід до розв'язання задачі 2, дозволяє спростити виконання більш складних задач, що містять обернені тригонометричні функції. Для прикладу, наведемо наступну задачу і також запропонуємо 2 способи її розв'язання.

Задача 3. Обчисліть значення виразу: $\cos(\arcsin \frac{4}{5})$ [7, с.229].

I спосіб (алгебраїчний): алгебраїчний спосіб розв'язання пропонується в тексті параграфа підручника [7, с.220] і полягає в тому, що $\arcsin \frac{4}{5}$ за означенням є деяким кутом $\alpha = \arcsin(\frac{4}{5})$, де $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ і $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Задача зводиться до відшукування $\cos \alpha$, при цьому слід врахувати, що $\sin \alpha > 0$, а отже кут α є кутом першої координатної чверті. Таким чином $\cos \alpha \geq 0$ і обчислюється за формулою $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

II спосіб (геометричний): За означенням арксинуса, трактуємо $\arcsin \frac{4}{5}$ як кут, синус якого дорівнює $\frac{4}{5}$, тобто $\alpha = \arcsin(\frac{4}{5})$. Отже, існує прямокутний трикутник з гострим кутом α , при цьому протилежний до нього катет дорівнює 4 од., а гіпотенуза – 5 од. У такому трикутнику легко розпізнається єгипетський трикутник зі сторонами 3, 4, 5 од. (рис.3).

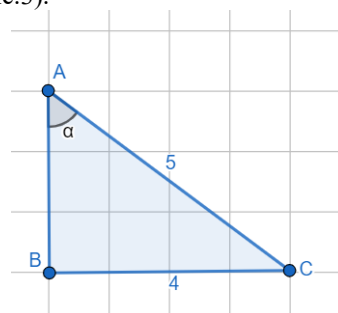


Рис.3. Прямокутний трикутник з кутом $\alpha = \arcsin(\frac{4}{5})$

Скориставшись такими міркуваннями, перепишемо умову задачі наступним чином: $\cos(\arcsin \frac{4}{5}) = \cos \alpha$ та знайдемо результат, як відношення прилеглого катета до гіпотенузи, або ж $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Відповідь: $\cos(\arcsin \frac{4}{5}) = \frac{3}{5}$.

Задачі на доведення нерівностей в курсі алгебри основної школи (9 клас) є достатньо складними для учнів. Тому можливість їх інтерпретації у вигляді геометричних фігур, коли доведення стає візуально очевидним, дозволяє спростити сприйняття учнями навчального матеріалу, а за умови використання відео-матеріалів чи динамічних моделей, ще й зацікавити, вмотивувати до вивчення математики.

Продемонструємо це на прикладі такої задачі:

Задача 4. Доведіть, що середнє арифметичне двох невід’ємних дійсних чисел більше ніж, або дорівнює середньому геометричному цих же чисел: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення:

I спосіб (алгебраїчний): доведення нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ проводиться шляхом виконання тотожних перетворень та застосування формул скороченого множення із врахуванням невід’ємності змінних $a \geq 0, b \geq 0$.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow a+b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Остання нерівність у ланцюжку перетворень є правильною при будь-яких значеннях змінних

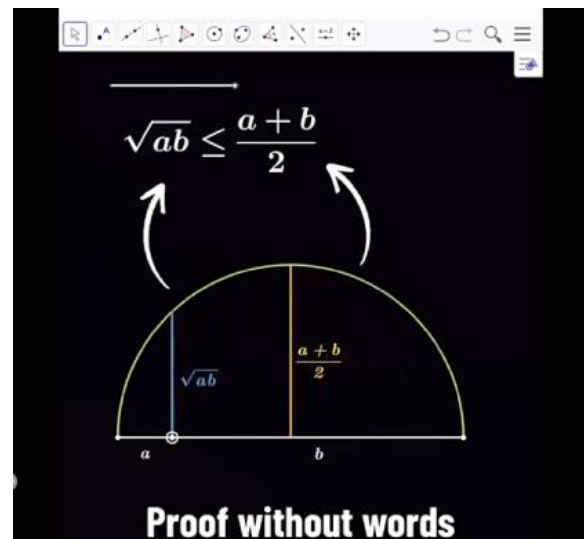
$a \geq 0, b \geq 0$, тому початкова нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ доведена.

II спосіб (геометричний):

Сучасні програмні засоби навчання математики створюють величезне поле для творчості вчителя, дозволяють якісно візуалізувати зміст навчального матеріалу за допомогою динамічних моделей. Одним із таких програмних засобів є GeoGebra. Зокрема, для вирішення поставленої задачі на доведення нерівності, можна створити власне або скористатися вже створеним кресленням GeoGebra [19]. Також доречним буде продемонструвати учням коротке відео під назвою «Proof without words» (з англ. «Доведення без слів»), яке створене на основі GeoGebra [9]. Скріни зазначених ресурсів представлені на рис.4.



а)



б)

Рис. 4. Скрін екрану а) аплету GeoGebra; б) відео фрагменту доведення

Суть геометричного доведення нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ полягає в наступному (рис. 4 а): на відрізку АВ довжиною $a + b$ як на діаметрі побудовано півколо, відповідно його радіус дорівнює $\frac{a+b}{2}$. Радіус $OP \perp AB$, відрізок $DC \perp AB$, де точка С – довільна точка діаметра АВ, а точка D – відповідна точка побудованого півкола. Трикутник ADB – прямокутний, $\angle ADB = 90^\circ$, як кут, що спирається на діаметр АВ. DC – висота проведена до гіпотенузи і, як відомо, є середнім геометричним довжин відрізків, на які ця висота ділить гіпотенузу, тобто $DC = \sqrt{ab}$. Із представленого креслення, очевидним є той факт, що довжина OP при будь-якому положенні DC завжди більша або рівна довжині DC, а отже справджується нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для довільних невід’ємних значень змінних a, b .

Інтегрований підхід до навчання

математики, зокрема внутрішньопредметну інтеграцію, можна реалізовувати не лише під час розв’язування різного роду задач, але й при поясненні навчального матеріалу. За результатами психолого-педагогічних досліджень, сучасні учні є візуалами, а потребують особливого підходу до вивчення математики.

Так, під час вивчення формул скороченого множення, зокрема, формули квадрата суми, окрім алгебраїчної тотожності $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, доцільно представляти учням і її геометричний зміст (рис.5). У підручниках з алгебри для 7 класу [12, 8] такий матеріал наведений у розділах «Історичні відомості» чи «Хто хоче знати більше?», тобто як додатковий. На рис. 5 представлено скрін з відео-сюжету «Формули скороченого множення» (Частина I) [10], у якому вищенаведена формула пояснюється у контексті гри «Страусина ферма», що може бути елементом зацікавлення та мотивації учнів.

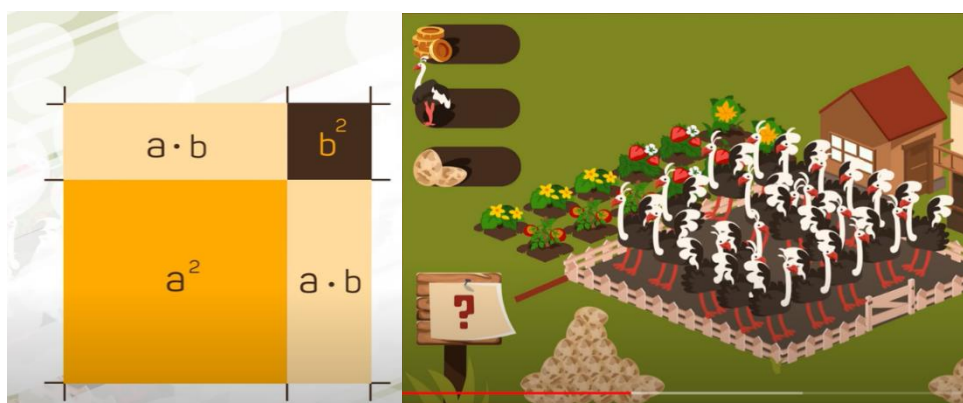


Рис. 5. Скрін відео-сюжету з YouTube на тему «Формули скороченого множення»

Висновки та перспективи подальших розвідок напряму. Інтеграція алгебраїчного та геометричного методів розв’язування задач допомагає учням розуміти математику як цілісну науку, а не набір окремих розділів. Такий підхід допомагає навчитися аналізувати задачі в комплексі, застосовувати різні методи і прийоми розв’язування, вибирати найбільш оптимальний підхід до кожної задачі; дозволяє не тільки забезпечити високу якість освіти, але й зробити навчальний процес більш цікавим і зрозумілим для учнів; допомагає формувати в учнів здатність до комплексного бачення математичних проблем, розвиває творчі здібності та мислення, що важливо у вирішенні проблем сучасного суспільства. Будь-який учитель може використати інтеграцію у своїй роботі і, відповідно, підвищити якість навчання своїх вихованців.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи/ Упорядник: Т.В. Коваль. Тернопіль: Мандрівцев, 2004. 80 с.
2. Huang Y., Ronau R.N. Theory to practice: A case study of integrating mathematics and science in a STEAM lesson. *Journal of Science Education and Technology*, 28(2), 2019. 211-224.
3. Mowris K., Carroll J.B., Reynolds M. Integrating mathematics and science instruction: Evaluation of a teacher professional development program. *International Journal of STEM Education*, 5(1), 2018. 1-13.
4. Rosenfield, S., Floyd, E., & Sweet, L. Integration of mathematics with science and social studies in grades 3-5. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(2), 2016. 94-111.
5. Sangwin C.J. Integrating mathematics: A subject under threat? *Teaching Mathematics and its Applications*, 30(2), 2011. 67-83.
6. Wu H. The content knowledge mathematics teachers need. In *Mathematics Matters in Education*, edited by Y. Li, W. J. Lewis and J. Madden, Springer, Cham, 43–91. 2018. URL: <https://math.berkeley.edu/~wu/Contentknowledge1A.pdf>. (дата звернення 20.05.2023р.)
7. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. ЗЗСО / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.

8. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.
9. Відео: Proof without words. URL: https://www.instagram.com/reel/CpQs1XGMIDH/?utm_source=ig_web_copy_link&igshid=MzRIODBiNWFIZA== (дата звернення 20.05.2023р.)
10. Відео-сюжет «Формули скороченого множення (Частина І)». URL: <https://www.youtube.com/watch?v=Oh6OXewdmkM> (дата звернення 20.05.2023р.)
11. Енциклопедія Сучасної України/ Редкол.: І. М. Дзюба, А. І. Жуковський, М. Г. Железняк [та ін.]; НАН України, НТШ. Київ: Інститут енциклопедичних досліджень НАН України, 2011. URL: <https://esu.com.ua/article-12384> (дата звернення 20.05.2023р.)
12. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 256 с.
13. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2016. 216 с.
14. Калачова Н.В. Інтеграція алгебри та геометрії в навчальному процесі старшої школи. *Педагогіка вищої та середньої школи*, 2016, Випуск 50.
15. Ковалева Л. М. (2016). Взаємозв’язок курсу математики і курсу геометрії в основній школі. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова*. Серія 8. Початкове освітнє середовище: історія, теорія і методика, (42), 121-126.
16. Лаврик М.К., Шамсієва І.Я. Інтегрований курс «Алгебра і геометрія» у підготовці вчителів математики. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету імені Т.Г.Шевченка*, 2013 рік, Випуск 115(1).
17. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.
18. Геометрія: підруч. для 9 кл. ЗЗСО/ А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків: Гімназія, 2017. 240 с.
19. Середнє арифметичне та геометричне. Аплет GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org/m/ghufdhqj> (дата звернення 23.05.2023р.)
20. Штекіна І.М. Інноваційні підходи до інтеграції курсів «Алгебра» та «Геометрія» у ЗНЗ. *Науково-практичний журнал «Теорія і практика сучасної педагогіки»*, 2021 рік, № 2.

REFERENCES

1. 400 zadach z matematychnykh olimpiad. 8-11 klasy (2004) [400 problems from mathematical Olympiads. Grades 8-11]. Ternopil: Mandrivets. [in Ukrainian].
2. Huang, Y., & Ronau, R.N. (2019). Theory to practice: A case study of integrating mathematics and science in a STEAM lesson. *Journal of Science Education and Technology*, 28 (2), 211-224. [in English]
3. Mowris, K., Carroll, J.B., & Reynolds, M. (2018). Integrating mathematics and science instruction: Evaluation of a teacher professional development program. *International Journal of STEM Education*, 5(1), 1-13. [in English]
4. Rosenfield, S., Floyd, E., & Sweet, L. (2016). Integration of mathematics with science and social studies in grades 3-5. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(2), 94-111. [in English]
5. Sangwin, C. J. (2011). Integrating mathematics: A subject under threat? *Teaching Mathematics and its Applications*, 30 (2), 67-83. [in English]
6. Wu, H. (2018). The content knowledge mathematics teachers need. In *Mathematics Matters in Education*, edited by Y. Li, W. J. Lewis and J. Madden, Springer, Cham, 43-91. URL: <https://math.berkeley.edu/~wu/Contentknowledge1A.pdf> [in English]
7. Alhebra i pochatky analizu: prof. riven: pidruch. dlia 10 kl. ZZSO/ A.H. Merzliak, D.A. Nomirovskiy, V.B. Polonskiy, M.S. Yakir (2018). [Algebra and beginnings of analysis: prof. level: elementary for 10th grade]. Kharkiv: Himnaziia. [in Ukrainian].
8. Bevz, H.P., Bevz, V.H. (2015) Alhebra: pidruch. dlia 7-ho kl. zahalnoosvit. navch. zakl. [Algebra: tutorial. for the 7th grade]. Kyiv: Vydavnytstvo «Vidrodzhennia». [in Ukrainian].
9. Video: Proof without words. URL: https://www.instagram.com/reel/CpQs1XGMIDH/?utm_source=ig_web_copy_link&igshid=MzRIODBiNWFIZA== [in English].
10. Video-siuzhet «Formuly skorochenoho mnozhennia (Chastyina I)» [Video story "Formulas of reduced multiplication (Part I)"]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=Oh6OXewdmkM> [in Ukrainian].
11. Entsyklopediia Suchasnoi Ukrainy (2011) [Encyclopedia of Modern Ukraine]. Redkol.: I.M. Dziuba, A.I. Zhukovskiy, M.H. Zhelezniak [ta in.]; NAN Ukrainy, NTSh. Kyiv: Instytut entsyklopedychnykh doslidzhen NAN Ukrainy. URL: <https://esu.com.ua/article-12384> [in Ukrainian].
12. Ister, O.S. (2015) Alhebra: pidruch. dlia 7-ho kl. zahalnoosvit. navch. zakl. [Algebra: tutorial. for the 7th grade]. Kyiv: Heneza. [in Ukrainian].
13. Ister, O.S. (2016) Heometriia: pidruch. dlia 8 kl. zahalnoosvit. navch. zakl. [Geometry: tutorial. for 8th grade]. Kyiv: Heneza. [in Ukrainian].
14. Kalachova, N.V. (2016). Intehratsiia alhebry ta heometrii v navchalnomu protsesi starshoi shkoly [Integration of algebra and geometry in the educational process of high school]. *Pedahohika vyshchoi ta serednoi shkoly*. [in Ukrainian].
15. Kovaleva, L.M. (2016). Vzaiemozviazok kursu matematyky i kursu heometrii v osnovnii shkoli [The relationship between the mathematics course and the geometry course in primary school]. *Naukovi chasopys*

NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriiia 8. Pochatkove osvritne seredovyshe: istoriia, teoriia i metodyka, (42), 121-126. [in Ukrainian].

16. Lavryk, M.K., Shamsieva, I.Ia. (2013). Intehrovanyi kurs «Alhebra i heometriia» u pidhotovtsi vchyteliv matematyky. [Integrated course "Algebra and geometry" in the training of mathematics teachers]. *Visnyk Chernihivskoho natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni T.H.Shevchenka*, Vypusk 115 (1). [in Ukrainian].
17. Merzliak, A.H., Nomirovskiy, D.A., Polonskiy, V.B., Yakir, M.S. (2018) Matematika: alhebra i pochatky analizu ta heometriia, riven standartu : pidruch. dlia 10 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Mathematics: algebra and beginnings of analysis and geometry, standard level: tutorial. for 10th grade]. Kharkiv: Himnaziia. [in Ukrainian].
18. Merzliak, A.H., Polonskiy, V.B., Yakir, M.S. (2017) Heometriia: pidruch. dlia 9 kl. [Geometry: tutorial. for 9th grade]. Kharkiv: Himnaziia. [in Ukrainian].
19. Cerednie aryfmetychne ta heometrychne. Aplet GeoGebra [Arithmetic and geometric mean. GeoGebra applet]. URL: <https://www.geogebra.org/m/ghufdhqj> [in Ukrainian].
20. Shtekina I.M. (2021) Innovatsiini pidkhody do intehratsii kursiv «Alhebra» ta «Heometriia» u ZNZ [Innovative approaches to the integration of the courses "Algebra" and "Geometry" in the schools]. *Naukovo-praktychnyi zhurnal «Teoriia i praktyka suchasnoi pedahohiky»*. № 2. [in Ukrainian].

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

БОТУЗОВА Юлія Володимирівна – доктор педагогічних наук, доцент кафедри математики та методики її навчання, Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка
Наукові інтереси: методика навчання математики, дистанційне навчання, ІКТ в навчанні математики.

НІЧИШИНА Вікторія Вікторівна – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та методики її навчання, Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: теорія та методика навчання (математика), інноваційні технології навчання майбутніх учителів математики, інтеграція у навчанні математики.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

BOTUZOVA Yuliia Volodymyrivna – doctor of pedagogical sciences, associate professor of the department of mathematics and methods of teaching math, Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University.

Scientific interests: methods of teaching mathematics, distance learning, ICT in teaching math.

NICHYSHYNA Victoriya Victorivna – candidate of pedagogical sciences, associate professor of the department of mathematics and methods of teaching math, Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University.

Scientific interests: theory and methods of teaching (mathematics), innovative technologies of teaching future teachers of mathematics, integration in teaching mathematics.

Стаття надійшла до редакції 11.07.2023 р.