of vocational guidance for students]. Available at: https://nus.org.ua/view/yak-mozhna-pokrashhyty-kontseptsiyu-proforiyentatsiyi-shkolyariv/.

9. Ulychnyi, I.L. (2014). *Formuvannia hotovnosti studentiv pedahohichnykh vyshchykh navchalnykh zakladiv do profesiinoho samovdoskonalennia* [Kirovohradskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Volodymyra Vynnychenka]. Naukovi zapysky. Ser. : Pedahohichni nauky. Vyp. 125. S. 211-215. Rezhym dostupu: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nz_p_2014_125_53

10. Jancur, M.S. (2012). *Profesijna orijentacija i metodyka proforijentacijnoji roboty* [Professional orientation and methods of career guidance work]. Kyiv: Vydavnychyj dim «Slovo».

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

ДМИТРУК Віталій Іванович – кардидат філологічних наук, доцент кафедри теорії і методики середньої освіти комунального закладу «Кіровоградський інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського».

Наукові інтереси: вивчення етапів професійного становлення старшокласників, визначення шляхів удосконалення профорієнтаційної роботи.

УЛИЧНИЙ Ігор Любомирович – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри педагогіки спеціальної та соціальної освіти Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: дослідження почуття провини, формування потенціалу професійного самовдосконалення старшокласників, психолого-педагогічний супровід профорієнтаційної роботи.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

DMYTRUK Vitalii Ivanovych – candidate of Philological Sciences, Associate Professor of the Department of theory and methodology of Secondary Education of the municipal institution "Kirovohrad Vasyl Sukhomlynsky Institute of postgraduate pedagogical education".

Research interests: study of the stages of professional development of high school students, determination of ways to improve career guidance counselling.

ULYCHNYI Ihor Lyubomyrovych – candidate of pedagogic sciences, associate professor of the department of pedagogy of special and social education of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Research interests: research of guilt, capacity building of professional self-improvement of high school students, psychological and pedagogical support of career guidance counselling.

Стаття надійшла до редакції 13.01.2022 р.

УДК 378.4
DOI: 10.36550/2415-7988-2022-1-203-61-68

ДРАГАНЮК Сергій Володимирович –
кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри вищої математики і статистики
Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського»
ORCID:https://orcid.org/0000-0001-7697-3480
e-mail: drahanyuk.sv@pdpu.edu.ua

СИНЮКОВА Олена Миколаївна –
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики
Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського»
ORCID:https://orcid.org/0000-0002-8340-6940
e-mail: olachepok@ukr.net

«ПОБУДОВИ» У ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ ТА ДОЦІЛЬНИЙ ХАРАКТЕР ЇХ ВИСВІТЛЕННЯ У НАВЧАЛЬНИХ КУРСАХ ЕВКЛІДОВОЇ СТЕРЕОМЕТРІЇ ЗА УМОВИ ПРАКТИКО-ОРІЄНТОВАНОГО НАВЧАННЯ

Постановка та обгрунтування актуальності проблеми. Як добре відомо, до першої половини дев'ятнадцятого століття, сформована у вигляді нехай і не досконалої з сучасної точки зору аксіоматичної теорії, геометрія тривимірного евклідового простору (про можливість існування просторів більших вимірностей та інших геометрій взагалі не було й думки) ототожнювалася з наукою про властивості статичних просторових форм довкілля, розглядалася виключно як «фізична» геометрія безпосередньо оточуючого людину середовища. Подібні статичні форми, зрозуміло, мали і мають як природне походження, так і утворюються в результаті практичної діяльності людей. Статичними вони є лише умовно. І природно створені форми припускають природну руйнацію, зміни та оновлення, і відповідна практична діяльність людей є напрямленою як на руйнацію старих, так і на створення нових доцільних просторових форм. Відповідно до фізіології людини, подібні зміни, принаймні з первинної точки зору, сприймаються як такі, що мають покроковий, конструктивний, характер. Саме тому для «фізичної» геометрії цілком природним є ототожнення поняття про існування геометричної фігури з поняттям про можливість її конструктивної побудови.

Але зараз, на сучасному етапі розвитку математики як науки, з теоретичної точки зору ми розглядаємо геометрію тривимірного евклідового простору у вигляді сконструйованої згідно визначених вимог аксіоматичної теорії, виокремлюючи у межах цієї теорії елементарну геометрію як її конструктивну складову. Змістове наповнення поняття про елементарну геометрію у першу чергу включає до себе відповідну аксіоматику усієї теорії, аксіоматику, що має так званий конструктивний характер, складається зі скінченної кількості назв неозначуваних множин, скінченної кількості назв неозначуваних відношень разом з їх типізацією, тобто, вказівкою на те, між якими множинами ці відношення діють, та скінченної кількості сформульованих аксіом. По-друге, вона містить конструктивного характеру умовиводи теорії цієї аксіоматики, тобто, такі твердження її теорії, справедливість яких у даній теорії можна обґрунтувати за допомогою міркувань конструктивного характеру, та такі поняття її теорії, означення яких можна навести за допомогою міркувань конструктивного характеру та існування яких у межах даної теорії можна обґрунтувати за допомогою саме такого характеру міркувань.

У той же час загальновідомо (див. [1], наприклад), що традиційно, курси геометрії закладів загальної середньої освіти носять двоїстий характер, ставлячи за мету органічно поєднати у собі закономірності «фізичної» геометрії довкілля з геометрією у вигляді аксіоматичної теорії. При цьому основну частину останньої утворює саме елементарна геометрія як її конструктивна складова.

Цим, здається, і можна пояснити той факт, що у переважній більшості підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти при формулюванні більшості тверджень щодо існування тих чи інших геометричних фігур замість слова «існує» вживаються словосполучення «можна провести» чи «можна відкласти», які, за своїм змістом, є рівносильними до словосполучення «можна побудувати». Як правило, все починається з формулювань відповідних аксіом. (Класичним тут є приклад твердження про те, що через будь-які дві точки можна провести пряму і лише одну). І подалі, умови наступних теорем і задач, які, за своїм змістом є твердженнями існування відповідних геометричних фігур, часто мають аналогічну «вільність» формулювань. При цьому, свідомо, чи не свідомо, термінологія «побудов» використовується, насамперед, тоді, коли обґрунтування відповідного існування проводиться за допомогою конструктивного характеру міркувань.

Подібна ситуація, з наукової точки зору, є цілком неприйнятною у першу чергу для планіметрії, яка, традиційно, включає до себе таку тему як «Геометричні побудови на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки».

Зрозуміло, що, історично, циркуль і лінійка, є основними, найпростішими (але не єдиними) інструментами такого виду професійної діяльності людей, як креслення, саме креслення на плоских поверхнях. Реалізація необхідних кроків процесу креслення виступає як процес послідовного конструювання підсумкового зображення. На кожному кроці з’являються певні елементи шуканого зображення, отримані у результаті скінченної кількості конкретних дій, реалізованих за допомогою конкретних креслярських інструментів. Природними математичними абстракціями і таких елементів, і зображення у цілому, є певні фігури евклідової планіметрії. Це і стало передумовою виникнення відповідних форм математичного моделювання подібного процесу креслення на підставі аксіоматичної теорії евклідової планіметрії. Як вже було підкреслено у [4], цілком природним представляється той факт, що на перших етапах формування евклідової геометрії як науки, тоді, коли вона виступала виключно як «фізична» геометрія, циркуль і лінійка безпосередньо розглядалися як внутрішні елементи самої геометрії, факт існування у геометрії відповідної фігури ототожнювався з реальною можливістю побудови фізичної моделі такої фігури за допомогою реальних циркуля і лінійки. У подальшому, в процесі формування евклідової геометрії як дедуктивної теорії, в процесі її організації у вигляді аксіоматичної теорії, природною стала необхідність чіткого визначення поняття про те, що треба мати на увазі під «побудовами за допомогою циркуля і лінійки» у межах саме аксіоматичної теорії евклідової планіметрії, необхідність чіткого розмежування змісту поняття про можливість «побудови» геометричної фігури з поняттям про її існування. (Перші питання такого типу виникли у зв’язку з відомими задачами про трисекцію кута та про подвоєння кубу).

Загальновідомо (див. [5, 6] наприклад), що і аксіоматична теорія евклідової стереометрії, і аксіоматична теорія евклідової планіметрії є повними, не залежно від конкретних, покладених у основу цих теорій, аксіоматик. Повнота несуперечливої аксіоматичної теорії означає, що до цієї теорії не можна додати незалежні від аксіом її аксіоматики твердження про поняття цієї теорії так, щоб у результаті знову отримати несуперечливу аксіоматичну теорію. З іншого боку, формування теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» саме як математичної теорії вимагає певної математичної формалізації характеристичних рис таких побудов у вигляді відповідних аксіом. В силу повноти, останнє не є можливим безпосередньо у межах аксіоматичної теорії евклідової планіметрії. Треба будувати продовження відповідної аксіоматики, у найпростішому варіанті, канонічне. При дотриманні необхідних умов для наведених формулювань, його, одночасно, можна розглядати і як канонічне продовження відповідної аксіоматики всієї евклідової геометрії. Як результат, утворюється нова аксіоматика, для якої аксіоматика евклідової геометрії безпосередньо є природною складовою ([5, 7], наприклад). При цьому варто відзначити, що є можливими і реально існують різні варіанти аксіоматики теорії «побудов на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки» як канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії, варіанти аксіоматичної теорії «побудов» на евклідовій площині за допомогою інших, ніж класичний варіант поєднання «циркуля і лінійки». «інструментів» (див. [8, 9], наприклад). На відміну від загального поняття про аксіоматику евклідової геометрії, стандартний курс геометрії закладів загальної середньої освіти, як правило, не містить жодної тези щодо аксіоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки». У той же час, на початку введення поняття «Геометрія – 7» міститься твердження типу «Давайте домовимося, що за допомогою лінійки ми можемо…, за допомогою циркуля ми можемо… Жодних інших дій за допомогою цих інструментів ми виконувати не можемо…». По суті, це – аналоги аксіом лінійки і циркуля. Отже, поняття про аксіоматику «циркуля і лінійки» у курсах геометрії закладів загальної середньої освіти присутнє, хоча і у неявному вигляді.

Для реалізації «фізичних» побудов у оточуючому людину тривимірному середовищі використовують різні спеціальні інструменти, але зрозуміло, що не у першу чергу креслярські. Визначені у результаті абстрагування певні властивості таких інструментів реальних просторових побудов, так само, як властивості циркуля і лінійки, можна сформувати у вигляді відповідного канонічного продовження аксіоматики евклідової стереометрії. І зразки подібних аксіоматик у навчальній літературі з евклідової геометрії є відомими (див. [10, 11, 12], наприклад). Наведені міркування дозволяють зробити висновок про те, що, виходячи як з наукової точки зору, так і з позиції організації системи практико-орієнтованого навчання, у курсах геометрії закладів загальної середньої освіти «побудови» у межах геометрії тривимірного евклідового простору варто розглядати з тих же самих позицій, що й у евклідовій планіметрії, варто визнати актуальними всі теоретичні розробки, що представляють собою підґрунтя відповідних практичних застосувань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. З теоретичної точки зору, може існувати безліч відповідного типу канонічних продовжень аксіоматики евклідової стереометрії. В Україні, з навчально-методичної літератури сьогодення, відомими, здається, є три з них ([10, 11, 12]). На жаль, для всіх трьох не вказано ті конкретні інструменти, скажімо, зі сфери будівництва, технічні можливості яких для відповідних канонічних продовжень виступають у якості «фізичного» підгрунтя їхнього змістового наповнення. Лише у третьому варіанті мова йде про деяку «пластинку», яку проголошено тим «фізичним» інструментом, функціональні характеристики якого виступають як прототип можливості «побудови» у евклідовому просторі площини за трьома її не колінеарними побудованими точками. Кожний з наведених варіантів подалі розглянемо у роботі.

Одночасно, треба відзначити, що традиційно, точніше, навіть, насамперед, під «побудовами» у тривимірному евклідовому просторі розуміють теорію «побудов» зображень геометричних фігур [14]. Сутність подібних «побудов» та їхній зв'язок з відповідною аксіоматикою теорії «побудов» також буде висвітлено у роботі.

У якості «побудов» у тривимірному евклідовому просторі розглядають також операції утворення тривимірних геометричних фігур з їхніх двовимірних розгорток.

Впровадження практико-орієнтованої системи навчання у закладах загальної середньої освіти, насамперед, на рівні старшої школи, є не лише сучасним освітнім трендом, а й нагальною вимогою сьогодення. Задачі на «побудови» систематичних курсів евклідової геометрії містять у собі майже необмежені можливості для впровадження саме такої системи навчання. І справа не лише у тому, що своїм виникненням вони зобов'язані практичній, професійній, діяльності людей і у подібній діяльності знаходять своє безпосереднє застосування. Відпрацьована століттями загальна схема їхнього розв'язання містить у собі майже невичерпні можливості для відпрацювання вмінь і навичок проведення дедуктивних міркувань, розвитку так званої буденної логіки у тих, хто навчається. Значення як першого, так і другого з вищевказаних аспектів, з точки зору задач, на розв'язання яких спрямовано загальну середню освіту, важко переоцінити. У той же час, загальновідомо, що, навіть розв'язання планіметричних задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» достатньо часто викликає утруднення не лише в учнів, а й у певної кількості вчителів, будь-які методичні розробки, що висвітлюють теоретичну сутність цього типу задач і у достатній кількості наводять зразки їхнього розв'язання, варто визнати з методичної точки зору актуальними. А теоретичні й практичні аспекти поняття про «побудови» у стереометрії залишаються дискусійними, навіть, у колі фахівців з методики навчання математики у закладах загальної середньої освіти. Дана стаття представляє собою один з наслідків подібних дискусій.

Мета роботи полягає в уточненні сутності поняття про «побудови» у межах, або на підставі, аксіоматичної теорії евклідової стереометрії, визначенні доцільних практичних шляхів її відтворення у навчальних курсах геометрії закладів загальної середньої освіти.

Матеріали і методи дослідження. Для обґрунтування відповідних умовиводів було застосовано такі методи проведення теоретичних досліджень, як аналіз та синтез, дедукція та аналогія. Наукове підґрунтя дослідження створили сучасні концепції аксіоматики, аксіоматичної теорії, таких співвідношень між аксіоматиками, як еквівалентність, продовження, зокрема, канонічне продовження. Безпосередній матеріал дослідження склали сучасні навчальні програми з геометрії для закладів загальної середньої освіти та їхнє змістове наповнення у вигляді лінійок підручників різних колективів авторів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо варіант аксіоматики стереометричної теорії «побудов», запропонований у навчальному посібнику з геометрії для учнів 10–11 класів шкіл і класів з поглибленим вивченням математики [11]. У контексті вищевказаного, для теоретичного усвідомлення сутності питання, при цьому дозволимо собі певні коментарі та уточнення.

1. У якості відповідної («базової») аксіоматики тривимірного евклідового простору будемо розглядати аксіоматику О. В. Погорєлова у її «шкільному» варіанті [2] або аксіоматику, неповний варіант якої наведено у будь-якому сучасному підручнику «Геометрія – 10». (Зрозуміло, що всі аксіоматики евклідової стереометрії є еквівалентними між собою. На даний час, в Україні, всі аксіоматики, явним чи неявним чином покладені у основу підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти, у значній мірі є схожими саме на аксіоматику О. В. Погорєлова).

2. Аксіоматику доповнимо назвами двох неозначуваних понять: неозначувана множина – сукупність побудованих геометричних фігур; неозначуване відношення – операція побудови геометричної фігури, переведення її з категорії не побудованих – у категорію побудованих; , де – множина всіх фігур аксіоматичної теорії аксіоматики , елемент шкали, утвореної над неозначуваними множинами аксіоматики .

3. Перелік аксіом аксіоматики доповнимо наступними твердженнями:

1. для кожної площини справджуються твердження всіх планіметричних аксіом теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки»;
2. кожна фігура евклідового простору, задана умовою задачі на побудову, є побудованою;
3. кожна побудована фігура містить принаймні одну побудовану точку, для кожної побудованої фігури, відмінної від усього евклідового простору, у евклідовому просторі існує принаймні одна побудована точка, яка цій фігурі не належить;
4. якщо дві фігури евклідового простору є побудованими, то можна визначити, чи є їх перетин порожньою множиною, чи ні, якщо він не є порожньою множиною, то він є побудованою фігурою;
5. якщо дві фігури евклідового простору є побудованими, то побудованою фігурою є їх об'єднання;
6. якщо побудовано дві різні точки, то побудованою є пряма, яка ці точки містить;
7. якщо побудовано три різні точки, що не належать одній прямій, то побудованою є площина, яка ці точки містить;
8. у евклідовому просторі існує принаймні одна побудована площина.

Як результат, утвориться аксіоматика теорії «побудов» тривимірного евклідового простору. Така аксіоматика є канонічним продовженням аксіоматики , її теорія містить теорію аксіоматики . Так само, як аксіоматика є канонічним продовженням певної аксіоматики евклідової планіметрії, дана аксіоматика є канонічним продовженням аксіоматики «циркуля і лінійки», створеної як канонічне продовження цієї аксіоматики евклідової планіметрії.

4. У теорії даної аксіоматики загальну задачу на «побудову» геометричної фігури евклідового простору, традиційно, будемо розглядати як задачу наступного виду.

1. У евклідовому просторі задано скінченну кількість геометричних фігур, або не задано жодної геометричної фігури; згідно другої доданої аксіоми, задані фігури вважаються побудованими.

2. Вказано властивості певної геометричної фігури, яку визначено як шуканий результат розв'язання даної задачі на побудову;

3. Застосовуючи додані аксіоми (1)–(8), у будь-якій послідовності, у необхідній кількості, але лише скінченну кількість разів, треба перетворити визначену не побудовану геометричну фігуру у побудовану.

Як і для теорії аксіоматики «побудов за допомогою циркуля і лінійки», найважливішим твердженням теорії створеної аксіоматики є твердження про те, що кожна побудована фігура теорії цієї аксіоматики існує у евклідовому просторі з точки зору визначеної «базової» аксіоматики евклідового простору, «побудови» геометричних фігур у теорії аксіоматики , одночасно, є конструктивного характеру обґрунтуваннями фактів існування цих фігур у теорії «базової» аксіоматики евклідового простору. Обернене твердження, зрозуміло, не є вірним: у теорії «базової» аксіоматики евклідового простору, а, отже, і у теорії аксіоматики , існують фігури, про які доведено, що їх неможливо побудувати у теорії аксіоматики , серед них є й фігури, існування яких може бути обґрунтовано у теорії «базової» аксіоматики за допомогою міркувань конструктивного характеру.

У теорії аксіоматики загальна схема розв'язання задач на «побудову», за аналогією до теорії розв'язання задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки», складається з чотирьох, традиційних, етапів: аналіз, побудова, доведення та дослідження. Реалізація етапу дослідження, як і для планіметрії, у більшості випадків, по суті, представляє собою розв'язання геометричної задачі з геометричними параметрами. (У ролі параметрів при цьому виступають вихідні дані задачі).

Варіант, що запропоновано у [12] схожий на варіант, представлений у [11].

З третім варіантом канонічного продовження аксіоматики тривимірного евклідового простору для створення відповідної аксіоматики теорії «побудов» можна ознайомитися, наприклад, за [10]. Як і у випадках перших двох варіантів, вказане першоджерело носить навчальний, а не науковий характер. Саме цим, здається, пояснюється факт не повної чіткості його представлення.

Як і у першому варіанті, до обраної аксіоматики тривимірного евклідового простору тут додаються назви таких самих двох неозначуваних понять. Далі наводиться відповідний перелік доданих аксіом. Перелік аксіом третього варіанту є ширшим за перший. Додатково, він містить аксіоми щодо можливостей «побудови» сферичної, циліндричної та конічної поверхонь. У підсумку, у якості аксіом теорії «побудов» у тривимірному евклідовому просторі, тут сформульовано наступні твердження:

1. якщо побудовано три не колінеарні точки, то можна побудувати площину, яка їх містить;

2. якщо побудовано дві не паралельні площини, то можна побудувати пряму їх перетину;

3. якщо площину побудовано, то на цій площині можна виконати всі побудови, передбачені аксіоматичною теорією «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки»;

4. точки, прямі, кола і півплощини, задані умовою задачі на побудову, є побудованими (тут, мабуть, краще було би обрати той варіант даної аксіоми, при якому стверджується, що всі геометричні фігури, задані умовою задачі на побудову, вважаються побудованими);

5. існує принаймні чотири побудовані точки, які не є компланарними (тобто, не належать до жодної однієї площини);

6. якщо побудовано точку і відрізок , то можна побудувати сферу з центром у точці радіусу ;

7. якщо побудовано пряму і відрізок , то можна побудувати пряму кругову циліндричну поверхню з віссю і радіусом ;

8. якщо побудовано точку , пряму і кут , , то можна побудувати таку пряму кругову конічну поверхню, вершина якої знаходиться у точці , вісь якої є паралельною до прямої , кут нахилу до осі твірних якої дорівнює .

Зрозуміло, що завдяки наявності тут аксіом (6) – (8), ця аксіоматика є сильнішою за першу, попередньо наведену, аксіоматику канонічного продовження Фактично, вона сама вже є канонічним продовженням цієї першої аксіоматики. Існують геометричні фігури, які можна «побудувати» у теорії цієї аксіоматики, але не можна «побудувати» у теорії першої аксіоматики, еліпс, гіпербола та парабола як конічні перерізи, наприклад. Подібна ситуація в геометрії тривимірного евклідового простору у повній мірі відтворює аналогічній ситуації у реальному «фізичному» довкіллі. Якщо певного об'єкту у природі існувати не може, то й побудувати, виробити, знайти його неможливо. Якщо об'єкт існує, то певних інструментів для його побудови може не вистачати, якщо додати інші інструменти, то подібного, поширеного, набору інструментів для побудови даного об'єкту вже може виявитися достатнім.

Звернемо особливу увагу на той факт, що всі наведені варіанти канонічних продовжень аксіоматик евклідової стереометрії у якості однієї з доданих аксіоми містять твердження про те, що для кожної площини справджуються твердження всіх планіметричних аксіом теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки». Цей факт є дуже суттєвим з точки зору теорії співвідношень між аксіоматиками. Він означає, що так само, як аксіоматика евклідової стереометрії є канонічним продовженням відповідної аксіоматики евклідової планіметрії у всіх аксіоматичних теоріях тривимірного евклідового простору, явним чи неявним чином покладених у основу сучасних підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти України, аксіоматики наведених варіантів теорій «побудов» евклідової стереометрії є канонічними продовженнями будь-якої аксіоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» евклідової планіметрії.

Як вже було вказано, традиційно, навіть, насамперед, під «побудовами» у тривимірному евклідовому просторі розуміють також теорію «побудов» зображень геометричних фігур даного простору. Варто усвідомлювати, що при цьому маються на увазі «побудови» іншого характеру. Так само, як евклідова геометрія у цілому сформувалася як наука, що узагальнює досвід людини по дослідженню властивостей просторових форм безпосередньо оточуючого її середовища з метою їх опанування, теорія зображень, точніше, різні теорії зображень, просторових фігур евклідового простору, у загальному випадку, на поверхнях цього простору, тобто, створення на їх основі певних підмножин тривимірного простору менших вимірностей, також сформувалася у своєму сучасному вигляді як відповідь на практичні, у першу чергу, професійні, потреби людей по відповідному опануванню властивостей тих же самих просторових форм довкілля. Як математичні теорії, всі подібні теорії зображень безпосередньо є складовими частинами евклідової стереометрії. У курсі стереометрії закладів загальної середньої освіти головним чином розглядають метод паралельного проєктування зображення просторових фігур евклідового простору на евклідовій площині. Цей метод там застосовують до найпростіших фігур евклідового простору – до многогранників, прямого кругового циліндра, прямого кругового конуса, прямого кругового зрізаного конуса та кулі. Оскільки відповідні зображення є плоскими фігурами, підмножинами так званої картинної площини, евклідової площини, природно, виникає питання не лише про їх існування та наявні геометричні характеристики, а й про можливість їхньої «побудови за допомогою циркуля і лінійки». Такі питання, зрозуміло, можуть бути розв'язаними у межах будь-якої з наведених аксіоматик теорії «побудов» у тривимірному евклідовому просторі. При цьому також зрозуміло, що питання про можливість «побудови» самої геометричної фігури та її зображення за своєю сутністю є різними, позитивна відповідь на одне з них не тягне за собою позитивної відповіді на інше.

Між фігурами евклідового простору, традиційно, виділяють чотири великі групи основних відношень: проєктивні, афінні, відношення подібності та метричні. Позиційною задачею теорії зображень геометричних фігур евклідового простору називають задачу встановлення за зображеннями геометричних фігур проєктивних відношень між їх елементами, або між елементами геометричних фігур, які визначаються через зображені фігури за допомогою проєктивних відношень. Аналогічним чином вводять поняття про афінну задачу, евклідову задачу (задачу подібності), метричну задачу теорії зображень геометричних фігур. Зображення фігури евклідового простору називають повним або позиційно повним, якщо за цим зображенням можна однозначно встановити всі проєктивні відношення між будь-якими елементами даної фігури та між фігурами, які визначаються на підставі даної за допомогою проєктивних відношень. Аналогічним чином вводять поняття про афінно повні, подібно повні, метрично повні зображення. Для позиційно повного зображення кожна позиційна задача теорії зображень має єдиний розв'язок. Аналогічні твердження є справедливими для афінно повних, подібно повних і метрично повних зображень (див. [5, 13], наприклад).

Відомо, що значну кількість позиційних, афінних, евклідових та метричних задач теорії зображень просторових фігур на картинній площині у випадках відповідної повноти їхніх зображень можна розв'язати як результат покрокових побудов на картинній площині «за допомогою циркуля і лінійки» (див., наприклад, [14, 15]), тобто, як у межах відповідної аксіоматичної теорії «побудов» на евклідовій площині, так і у межах її канонічного продовження до теорії «побудов» тривимірного евклідового простору. При цьому, у випадку позиційної повноти зображення «побудовам» на картинній площині «за допомогою циркуля і лінійки», найчастіше, будуть однозначно відповідати «побудови» у евклідовому просторі за умови вищезазначеної узгодженості відповідних канонічних продовжень відповідних аксіоматик. У результаті, ми будемо одночасно мати як «побудови» на зображенні (планіметрія), так і «побудови» за зображеннями (стереометрія).

У якості «побудов» у тривимірному евклідовому просторі розглядають також операції утворення тривимірних геометричних фігур з їх двовимірних розгорток. Питання щодо існування відповідних фігур входять до контенту аксіоматичної теорії евклідової стереометрії. Питання можливості «побудови» відповідних розгорток «за допомогою циркуля і лінійки», зрозуміло, є питаннями відповідного канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії. Наведені приклади аксіоматик теорій «побудов» тривимірного евклідового простору гарантують можливість «побудови» у межах кожної з наведених аксіоматичних теорій відповідної геометричної фігури у випадку обґрунтованості факту її існування як фігури евклідової стереометрії і факту можливості «побудови» її розгортки за допомогою циркуля і лінійки.

Висновки та перспективи подальших розвідок напряму. За своїм теоретичним підґрунтям теорія «побудов» у евклідовій стереометрії принципово не відрізняється від планіметричної теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки». Отже, за умови практико-орієнтованої спрямованості процесу навчання, є сенс у невеликому обсязі додати розділи, присвячені «побудовам» у тривимірному евклідовому просторі до традиційного контенту курсу евклідової стереометрії закладів загальної середньої освіти. Зрозуміло, що при цьому ступінь заглибленості у сутність питання повинен бути, приблизно, таким самим, як у курсі планіметрії базової загальної середньої освіти при висвітленні питання про «побудови» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки». Одночасно, у курсі евклідової планіметрії важливо звернути увагу учнів на існування для евклідової площини різних теорій «побудов», «за допомогою різних інструментів», розкрити сутність природних витоків подібного існування.

Відповідні питання, безумовно, варто додати і до змістового наповнення фахової підготовки у педагогічних закладах вищої освіти майбутніх вчителів математики закладів загальної середньої освіти. Подібні питання безпосередньо відносяться до наукових засад сучасних курсів геометрії закладів загальної середньої освіти.

Представлені у роботі дослідження проведено у рамках міжнародного проєкту MoPED.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Александров А. Д. Проблемы науки и позиция ученого. Ленинград: Наука, 1988. 511 с.

2. Александров А. Д. Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия для 10–11 классов: учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. Москва: Просвещение, 1992. 464 с.

3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. *Геометрия.* В 2-х ч., Ч. 2: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Москва: Просвещение, 1987. 352с.

4. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 192 с.

5. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.

6. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підручник для 7-х класів. Київ.: Зодіак-ЕКО, 2007. 208 с.

7. Венниинджер М. Модели многогранников. М.: Мир, 1974. 236 с.

8. Егоров И. П. О математических структурах. Москва: Знание, 1976. 64 с.

9. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Х.: Ранок, 2016. 224 с.

10. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Вид-во «Ранок», 2018. 288 с.

11. Істер О.С. Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. К.: Освіта, 2007. 224 с.

12. Істер О.С. Єргіна О. В Геометрія: (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти Київ : Генеза, 2018. 368 с.

13. Кутузов Б. В. Геометрия: пособие для учительских и педагогических институтов. Москва: Учпедгиз, 1950. 284с.

14. Погорелов А. В. Геометрия: учеб. для 7 – 11 кл. сред. шк. Москва: Просвещение, 1990. 384 с.

15. Сборник задач по геометрии. Часть 2. Учеб. пособие для студентов физ.–мат. фак. пед. ин-тов / Под ред. Л. С. Атанасяна. Москва: Просвещение, 1975. 176 с.

16. Синюкова О. М., Ладиненко Л. П. Зображення просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії: навчальний посібник. Частина 1.Одеса: Фенікс, 2019. 486 с.

17. Синюкова О. М. Чепок О. Л. Практико-орієнтована форма організації процесу навчання як необхідна передумова опанування конструктивних елементів евклідової геометрії у закладах загальної середньої освіти. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 4(26). С. 100–106. DOI 10.31110/2413-1571-2020-026-4-017.

18. Тадеєв В. О. Геометрія. Основи стереометрії: многогранники: дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів . Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. 384 с.

19. Теплінський Ю. В. Елементи конструктивної геометрії: навч. посіб. Кам'янець–Подільськ: Кам'янець–Поділ. держ. ун-т, 2005. 152 с.

20. Pambuccian, V. (2008). Axiomatizing geometric constructions Journal of Applied Logic. Volume 6, Issue 1, P. 24-46

REFERENCES

1. Aleksandrov, A. D. (1988). *Problemy nauki i pozicija uchenogo.* [Problems of science and the position of the scientist]. Leningrad: Nauka. 511 s. [in Russian].

2. Aleksandrov, A.D. Verner A. L. Rusik V.I. (1992). *Geometrija dlja 10–11 klassov* [Geometry for 10-11 grades] Moskva: Prosveshhenie, 1464 s. [in Russian].

3. Atanasjan, L.S., Bazylev, V.T. (1987). *Geometrija* [Geometry]. V 2-h ch., Ch. 2Moskva: Prosveshhenie. 352s. [in Russian].

4. Bevz, H. P., Bevz, V. H. & Vladimirova, N. H. (2015). *Heometriia* [Geometry]: pidruch. dlia 7 kl. zahalnoosvit. navch. zakl. Kyiv: Heneza, 192 s.

5. Bevz, H. P., Bevz, V. H. & Vladimirova, N.H. (2018). *Heometriia* [Geometry]: pidruch dlia 10 kl. : pidruch. dlia zahalnoosvitn. navch. zakl.: profil. rivnen. Kyiv: Heneza.272 s.

6. Burda, M. I. & Tarasenkova N. A. (2007). *Heometriia: pidruchnyk dlia 7-kh klasiv* [Geometry: a textbook for the 7th form.] Kyiv: Zodiak-EKO, 208 s.

7. Vennyndzher, M. (1974). *Modely mnohohrannykov.* [Models of polyhedrons.] Moskva: Myr. 236 s.

8. Egorov, I. P. (1976). *O matematicheskih strukturah*. [About mathematical structures]. Moskva: Znanie. 64s. [in Russian].

9. Iershova, A. P., Holoborodko, V. V. & Kryzhanovskyi, O. F. (2016). *Heometriia.* [Geometry.] Pidruchnyk dlia 7 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Kharkiv: Ranok. 224 s.

10. Iershova, A. P., Holoborodko, V. V., Kryzhanovskyi, O. F. & Yershov, S. V. (2018). *Heometriia.* [Geometry.] Pidruchnyk dlia 10 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Kharkiv: Ranok. 288 s.

11. Ister, O.S. (2007) *Heometriia* [Geometry]: Pidruchnyk dlia 7 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Kyiv: Osvita, 2007. 224 s.

12. Ister, O.S. (2018). *Heometriia* [Geometry]: Pidruchnyk dlia 10 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Kyiv: Osvita, 368 s.

13. Kutuzov, B. V. (1950). *Geometrija* [Geometry]. Moskva: Uchpedgiz. 284s. [in Russian].

14. Pogorelov, A. V. (1990). *Geometrija* [Geometry]. Moskva: Prosveshhenie. 384 s. [in Russian].

15. *Sbornik zadach po geometrii. Chast' 2* [Collection of problems in geometry. Part 2.]. Atanasjan, L.S. (Ed). Moskva: Prosveshhenie, 1975. 176 s. [in Russian].

16. Syniukova, O.M., Ladynenko, L.P. (2019). *Zobrazhennia prostorovykh fihur na ploshchyni pry vykladanni evklidovoi heometrii: navchalnyi posibnyk. Chastyna 1* [Images of spatial figures on a plane in the teaching of Euclidean geometry. Part 1]. Odesa: Feniks, 486 s. [in Ukrainian].

17. Syniukova, O.M. Chepok, O.L. (2020). *Praktyko-oriientovana forma orhanizatsii protsesu navchannia yak neobkhidna peredumova opanuvannia konstruktyvnykh elementiv evklidovoi heometrii u zakladakh zahalnoi serednoi osvity* [Practice-oriented form of organizing the teaching-learning process as a necessary precondition for mastering the constructive elements of euclidean geometry at institutions of general secondary education]. Fizyko-matematychna osvita. Vypusk 4(26). S. 100–106. DOI 10.31110/2413-1571-2020-026-4-017. [in Ukrainian].

18. Tadeiev, V.O. (2003). *Heometriia. Osnovy stereometrii: mnohohrannyk* [Geometry. Fundamentals of stereometry: polyhedral]. Ternopil: Navchalna knyha – Bohdan, 384 s. [in Ukrainian].

19. Teplinskyi, Yu.V. (2005). *Elementy konstruktyvnoi heometrii* [Elements of structural geometry]. Kamianets–Podilsk: Kamianets–Podil. derzh. un-t, 152 s. [in Ukrainian].

20. Pambuccian, V. (2008). Axiomatizing geometric constructions Journal of Applied Logic. 6, (1), 24-46 https://doi.org/10.1016/j.jal.2007.02.001. [in English].

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ДРАГАНЮК Сергій Володимирович – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського».

Наукові інтереси: алгебра, теорія чисел і математична логіка та відповідні методики навчання у закладах вищої освіти для майбутніх викладачів математики закладів загальної середньої освіти.

СИНЮКОВА Олена Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського».

Наукові інтереси: ріманова геометрія та її узагальнення, методика навчання геометрії у закладах вищої освіти, методика навчання геометрії у закладах загальної середньої освіти.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Draganyuk Serhii Volodymyrovych – candidate of Physical and Mathematical Sciences, Higher Lecturer of the Department of Higher Mathematics and Statistics of the State Institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky».

Circle of scientific interests: algebra, number theory, mathematical logic and methods of their teaching in higher school for the future math teachers of secondary school.

Sinyukova Olena Mukolaivna – candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senuior Lecturer, Senuior Lecturer of the Department of Higher Mathematics and Statistics of the State Institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky».

Circle of scientific interests: Riemannian geometry and its generalizations, methods of teaching geometry in higher school, methods of teaching geometry in secondary school.

Стаття надійшла до редакції 11.01.2022 р.