11. Odotiuk, I. *Otsinka rezultativ naukovoi diialnosti v Ukraini: normatyvno-pravovyi aspekt* (2012) [Evaluation of the results of scientific activity in Ukraine: normative-legal aspect]. Kyiv.

12. *Pro derzhavnu atestatsiiu zakladiv vyshchoi osvity v chastyni provadzhennia nymy naukovoi (naukovo-tekhnichnoi) diialnosti : Nakaz M-va osvity i nauky Ukrainy vid 12 berez. 2019 roku N 338* (2019) [About the state certification of establishments of higher education concerning their carrying out of scientific (scientific and technical) activity: the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine from March 12. 2019 N 338.].

13. *Pro naukovu i naukovo-tekhnichnu diialnist: Zakon Ukrainy vid 26 lystop. 2015 r. № 848-VIII* (2015) [On scientific and scientific-technical activity: Law of Ukraine of November 26. 2015 № 848-VIII].

14. Fishchuk, V. ets. (2020) *Ukraina 2030E – kraina z rozvynutoiu tsyfrovoiu ekonomikoiu* [Ukraine 2030E is a country with a developed digital economy].

15. *Tsyfrova adzhenda Ukrainy – 2020 («Tsyfrovyi poriadok dennyi – 2020*) (2016) [Digital Agenda of Ukraine - 2020 (Digital Agenda - 2020)].

16. Shtovba, S. D., Shtovba, O.V. *Analiz naukometrychnykh indykatoriv dlia otsiniuvannia zdobutkiv vchenoho*. (2016) [Analysis of scientometric indicators to assess the achievements of the scientist].

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ВАКАЛЮК Тетяна Анатоліївна – доктор педагогічних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу відкритих освітньо-наукових інформаційних систем Інституту інформаційних технологій і засобів навчання Національної академії педагогічних наук України.

Наукові інтереси: інформаційно-комунікаційні технології в освіті, хмарні технології, цифрове освітньо-наукове середовище.

ІВАНОВА Світлана Миколаївна – кандидат педагогічних наук, завідувач відділу відкритих освітньо-наукових інформаційних систем Інституту інформаційних технологій і засобів навчання Національної академії педагогічних наук України.

Наукові інтереси: педагогіка, інформаційно-комунікаційні технології в освіті, електронна бібліотека, відкриті електронні науково-освітні системи

КІЛЬЧЕНКО Алла Віленівна – науковий співробітник відділу відкритих освітньо-наукових інформаційних систем Інституту інформаційних технологій і засобів навчання Національної академії педагогічних наук України.

Наукові інтереси: інформаційно-комунікаційні технології в освіті, педагогіка, відкриті електронні науково-освітні системи.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

VAKALIUK Tetiana Anatoliivna - Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Leading Researcher of the Department of Open Education and Scientific Information Systems of the Institute of Information Technologies and Learning Tools of the National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine.

Circle of research interests: information and communication technologies in education, cloud technologies, digital educational and scientific environment.

IVANOVA Svitlana Mykolaivna – candidate of pedagogical sciences, Head of the Department of Open Education and Scientific Information Systems of the Institute of Information Technologies and Learning Tools of National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine.

Circle of research interests: pedagogy, information and communications technology in education, digital library, open electronic scientific and educational system.

KILCHENKO Alla Vilenivna – researcher of the Department of Open Education and Scientific Information Systems of the Institute of Information Technologies and Learning Tools National Academy of Educational Sciences of Ukraine.

Circle of research interests: information and communication technologies in education, pedagogy, open electronic scientific and educational systems.

Стаття надійшла до редакції 16.04.2021 р.

УДК 517.51
DOI: 10.36550/2415-7988-2021-1-198-24-27

ВОЛКОВ Юрій Іванович –
доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID:https://orcid.org/0000-0002-2270-3407
e-mail: yulysenko@i.ua

ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна –
кандидат педагогічних наук, доцент, доцентка кафедри математики
Цетральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
ORCID:https://orcid.org/0000-0002-0523-7889
e-mail: vojnalovichn@gmail.com

РОЛЬ ТА МІСЦЕ ЗАДАЧ ПРИ ВИВЧЕННІ КОМБІНАТОРИКИ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Останнім часом комбінаторика посіла належне місце в змісті математичної освіти як у вищій, так і в середній школі. Проте, досвід викладання даного розділу математики в школі та в педагогічному університеті свідчить, що комбінаторика складно засвоюється учнями та студентами. Виходить зачароване коло: учні з досить посередніми знаннями й страхом перед комбінаторикою приходять до педагогічних університетів, прослуховують абстрактний курс дискретної математики, знову йдуть до школи й навчають учнів тому, чого самі глибоко не розуміють. Навіть у завданнях ЗНО пропонуються комбінаторні задачі алгоритмічного характеру. Та краса комбінаторики в її неалгоритмічності. Саме вона покликана розвивати продуктивне, евристичне мислення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблеми комбінаторики привертали увагу видатних математиків XX ст.: Н. Віленкіна, Б. Гнєденка, К. Рибнікова, І. Скорохода, О. Хінчіна, М. Ядренка, І. Яглома та інших.

Та сучасні вимоги суспільства щодо математичних компетентностей його громадян вимагають перегляду традиційних поглядів на навчання.

Метою статті є висвітлення та обґрунтування методичного підходу до вивчення основних понять комбінаторики, коли головним засобом навчання стають задачі.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети використовувалися методи аналізу наукової та методичної літератури стосовно проблеми дослідження, здійснювалося узагальнення власного педагогічного досвіду.

Виклад основного матеріалу дослідження. Починати рвати зачароване коло потрібно з підготовки вчителів. Розділ «Комбінаторика» в курсі «Дискретна математика» необхідно викладати так, щоб цією моделлю майбутні вчителі змогли скористатися в своїй професійній діяльності. Тобто, в основі методичної системи навчання комбінаторики повинна лежати професійно-педагогічна спрямованість курсу. Крім того, велика вага покладається на задачі. «Серце математики – в її задачах», – писав відомий математик П. Халмош. Задачі мають стати основним засобом формування знань та розвитку математичних здібностей тих, хто навчається. На цьому напрямку й зупинимося.

Взагалі у літературі немає єдиної думки щодо розуміння призначення задач. Одні розуміють розв’язування задач як самостійну мету. У такому випадку необхідно домогтися, щоб всі студенти розв’язували задачі швидко й безпомилково. Досягти цього на практиці неможливо. Інші бачать мету не в отриманні відповіді, а в процесі самого розв’язування. При такому підході учень (студент) набуває нових знань, навичок і вмінь, розвиває в собі наполегливість. Він просувається в засвоєнні математики. Йому надається самостійність, а не підказується кожен крок. Ми дотримуємося саме такого розуміння мети розв’язування задач.

Далі розглядається модель побудови навчального матеріалу, яка буде корисною як при вивченні початкових понять комбінаторики майбутніми вчителями, так і учнями шкіл, та пропонується цикл вправ для формування знань, умінь та навичок.

Розпочати знайомство з комбінаторикою рекомендуємо з двох її основних правил: правила суми та правила добутку, які можна вважати за аксіоми комбінаторики. Бажано ці правила спочатку проілюструвати на прикладах, що сприятиме свідомому засвоєнню навчального матеріалу. [1] Корисно також запропонувати самостійно придумати аналогічні задачі.

Правила дозволяють розв’язувати досить широке коло задач. Важливо не пропустити цікавий тип задач із красивим методом розв’язання. Розглянемо дві такі задачі.

Задача 1. При приготуванні піци до сиру додають різні компоненти, які забезпечують той, чи інший смак піци. У Білла є перець, цибуля, сосиски, гриби та анчоуси. Скільки типів піци може приготувати Білл?

Розв’язання. Побудуємо математичну модель даної задачі. Готуючи той чи інший тип піци, будемо записувати її рецепт: якщо використовуємо даний інгредієнт, то ставимо 1, інакше – 0. Наприклад,

перець	*цибуля*	*сосиски*	*гриби*	*анчоуси*
1	1	0	0	1
0	0	1	1	1

Рецептом є послідовність з п’яти елементів. А елементами послідовності – 0 і 1. Між послідовностями та піцами існує взаємно однозначна відповідність. Задача звелася до простішої: скільки різних п’ятизначних номерів можна скласти з двох цифр {0, 1}.

Кожну цифру номера можна обрати двома способами. Тому за правилом добутку різних номерів, а, отже, й різних типів піц буде 2^5.

Задача 2. Скільки різних дільників має число 2310?

Розв’язання. Оскільки $2310=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$, то число d буде дільником 2310, якщо d – добуток чисел з набору 2, 3, 5, 7, 11. Будемо складати всі можливі добутки з цих чисел такими міркуваннями: перше число може входити до добутку або не входити, друге число також може входити або не входити до добутку, аналогічна ситуація й з іншими числами. Тому різних дільників числа 2310, які є добутком чисел з набору 2, 3, 5, 7, 11, буде 2^5. З цього числа виключимо випадок, коли $d=0$, і додамо випадок, коли $d=1$. Отже, число 2310 має 32 різних дільника.

Не можна оминути й задачі, для розв’язання яких одночасно використовуються обидва правила. Прикладом може слугувати така задача: скільки різних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожну цифру можна використовувати не більше одного разу.

Наступними поняттями, які заслуговують на увагу, є розміщення, перестановки та комбінації. Їх можна вводити на основі поняття вибірки.

Під вибіркою розуміють сукупність деяких елементів, вибраних із заданої множини певним чином. Поняття вводиться описово. Його зміст розкривається на прикладах. [1] За допомогою цих же прикладів неважко пояснити різницю між впорядкованими й невпорядкованими вибірками, з повтореннями та без, що в свою чергу зробить зрозумілими поняття розміщень, перестановок і комбінацій. Всі означення, мають спільну структуру:

вказується найближчий рід і видові відмінності. [1].

Свідоме засвоєння розглядуваних понять усуне багато труднощів при їх застосуванні до розв'язування задач і може бути досягнуте лише за умови розуміння сутності істотних ознак. Тому варто відпрацювати цей матеріал на конкретній задачі. Доцільно запропонувати виписати всі двоелементні розміщення, двоелементні комбінації і перестановки з повтореннями та без для деякої множини, наприклад: {Аня, Саша, Маша}.

Розгляд усіх видів вибірок повинен супроводжуватися прикладами життєвих ситуацій, де можуть зустрітися ці вибірки.

Далі учні повинні навчитися використовувати означені вибірки для побудови математичних моделей прикладних задач. Саме розпізнавати, а не вгадувати той чи інший вид вибірки. Послідовність міркувань проілюструємо на прикладі наступної **задачі**. Фермеру потрібні чотири водії, а до нього з пропозицією своїх послуг звернулися 10. Скількома способами він може вибрати з них чотирьох?

Розв'язання. Перш за все необхідно виділити множину, з якої будемо формувати вибірки. Множина складається з 10 водіїв (n = 10). Ми обираємо чотирьох водіїв, тобто довжина вибірок дорівнює 4 (k = 4). З'ясуємо характеристичні ознаки вибірок: повторення елементів відсутні, порядок не має значення. Отже, мова йде про комбінації без повторення елементів.

Для перших задач запис може бути таким: B = {10 водіїв}.

n = 10, k = 4, невпорядковані, без повторень	$\Rightarrow$	*комбінації без повторення з 10 елементів по 4*	$\Rightarrow C_{10}^4$

Після знайомства з усіма типами вибірок необхідно вивести формули для підрахунку їх кількості. Спочатку доцільно це зробити для розміщень з повтореннями та без, скориставшись правилами комбінаторики. Цикл вправ на розміщення повинен містити задачі, які вже учні розв'язували за допомогою правил комбінаторики. Так діти помітять, що є клас задач, які можна розв'язувати як за допомогою правила добутку так і за допомогою підрахунку числа розміщень. Особливість таких задач – впорядкованість елементів вибірки.

Спостереження показують, що найбільш складними для учнів (та й студентів) є теореми про число комбінацій, оскільки вони вимагають складних комбінаторних міркувань. Цих труднощів можна уникнути, якщо спочатку провести міркування для конкретної задачі з невеликою кількістю даних. Наприклад, перед доведенням теореми про число комбінацій без повторень, можна розглянути такий приклад.

Для множини B={a, b, c} випишемо всі двоелементні комбінації і розміщення без повторень. Неважко помітити, що з кожної комбінації, змінюючи порядок слідування її елементів, ми отримуємо P_2=2! вибірок, які є розміщеннями без повторень з 3-х елементів по 2. Отже, маємо залежність $A_3^2 = C_3^2 \cdot 2 = C_3^2 \cdot P_2$, з якої знаходимо $C_3^2 = \dfrac{A_3^2}{P_2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Наведені міркування легко поширити на загальний випадок.

Перед доведенням теореми про число комбінацій з повтореннями корисною буде **задача**. У чарівному мішку Святого Миколая є апельсинки, горішки й цукерки. Кожній дитині дістанеться подарунок, який містить чотири гостинці. Скільки різних подарунків може скласти Чарівник?

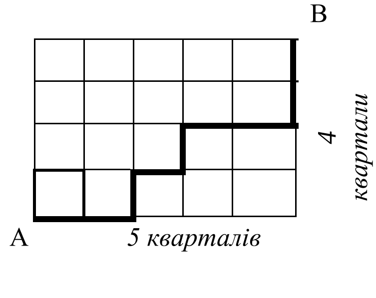
Розв'язання. Переглядаючи різні подарунки, кожен гостинець позначатимемо окремо: спочатку наявність апельсинок, потім горішків, потім цукерок. Щоб не писати назви гостинців, будемо один вид гостинця відділяти від іншого рискою, а наявність гостинця відмічати плюсом. Наприклад, <+ | + | + +> – цей запис означає, що подарунок складається з однієї апельсинки, одного горішка та двох цукерок.

Отже, кожному подарунку відповідає своя шестиелементна послідовність з 2-х рисок і 4-х плюсів, а кожній такій послідовності – свій подарунок. Тому різних подарунків стільки, скільки існує різних послідовностей з 2-х рисок і 4-х плюсів. А цих послідовностей стільки, скількома способами можна вибрати два елементи (місцеположення рисок) з 4+2=6 елементів, тобто C_{4+2}^2. Легко помітити, що рисок на одну менше ніж видів гостинців, тобто 3 – 1 = 2.

Отже, число різних подарунків, які складено з 3-х видів гостинців по 4 гостинці, тобто число комбінацій з повторенням з 3-х елементів по 4, ми знаходимо такими міркуваннями $\overline{C}_3^4 = C_{4+(3-1)}^{3-1} = C_{4+3-1}^{3-1} = C_6^2 = 15$.

Ці міркування дозволяють встановити твердження $\overline{C}_n^k = C_{k+n-1}^{n-1}$, яке доводиться аналогічно. Проведені міркування будуть корисними й при розв'язуванні багатьох інших задач.

Числа C_n^k часто зустрічаються в різних розділах математики й мають важливі властивості. Наприклад, $C_n^k = C_n^{n-k}$. Цю властивість корисно довести не лише використовуючи формулу для обчислення числа комбінацій, а й чисто комбінаторним шляхом. Та спочатку варто розглянути **задачу**. Скільки різних маршрутів може вибрати турист, який вирішив пройти дев'ять кварталів, – з них п'ять на схід і чотири на північ?



Розв'язання. Для побудови математичної моделі даної прикладної задачі зобразимо «шахове місто», в якому нам потрібно потрапити з пункту А в пункт В рухаючись лише зліва направо та знизу вгору.

Обираючи той чи інший шлях, будемо записувати маршрут за допомогою нулів та одиничок. Напрямок руху вправо позначатимемо «0», вгору – «1». Тоді замальований маршрут запишеться так: 0 0 1 0 1 0 0 1 1. Помічаємо взаємно однозначну відповідність між можливими найкоротшими маршрутами та послідовностями такого виду. Кожна послідовність складається з 5 + 4 = 9 елементів, серед яких п'ять нулів і чотири одиниці. І залишається підрахувати скількома способами можна розставити 4 одиниці на дев'яти місцях (або 5 нулів на дев'яти місцях). Отже, з одного боку розв'язання звелося до підрахунку C_9^4, з іншого – C_9^5. Дві різні відповіді? Ні, бо C_9^5 = C_9^4 = 124. Проаналізувавши цю рівність, висуваємо гіпотезу, що C_n^k = C_n^{n-k}, яку далі доводимо.

До властивості $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ теж корисно прийти за допомогою задач. Для цього повернемося до задачі про піцу й розв'яжемо її по іншому. Розіб'ємо нашу задачу на 5 однотипних підзадач і будемо підраховувати скільки різних піц можна отримати, якщо спочатку не використати жодного компоненту, потім 1 компонент, потім 2, і так до 5, тобто коли покласти всі інгредієнти. Далі за правилом суми маємо, що різних типів піц буде $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$, або теж саме 2^5.

Аналіз отриманої тотожності дозволить висунути більш загальну гіпотезу, яка легко доводиться з використанням бінома Ньютона.

Розглянуті комбінаторні міркування широко використовуються при розв'язуванні різноманітних задач. Та формуючи цикл вправ не можна оминути й задачі таких типів.

1. Серед 10 людей є двоє знайомих. Скількома способами можна посадити цих людей на 10 стільців так, щоб знайомі ***сиділи поруч***?

2. Гральний кубик кидають три рази. Скільки різних послідовностей очок, серед яких є ***хоча б одна*** шістка, можна отримати?

3. З колоди, яка налічує 36 карт дістають 6. Скільки існує різних варіантів, що містять точно дві дами?

В межах статті охопити всі типи задач неможливо. Ми обмежилися такими, що найчастіше зустрічаються в різноманітних збірниках. Та свідоме засвоєння розглянутих методів є тим мінімумом, що сприятиме самостійному пошуку розв'язань самих різноманітних комбінаторних задач.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок. Як бачимо, роль задач у формуванні комбінаторного мислення дуже вагома. А тому задачі можна вважати основним засобом навчання. Головними перевагами пропонованого методичного підходу у викладанні початкових понять комбінаторики можна вважати: свідоме засвоєння навчального матеріалу; розвиток евристичного мислення; розгляд різних математичних моделей однієї і тієї ж задачі; посилення прикладної спрямованості курсу; формування банку навчальних задач.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на виявлення та дослідження напрямків професійно-педагогічної спрямованості курсу.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: навч. посібн. : Кіровоград: РВЦ КДПУ ім.В.Винниченка, 2000. 176 с.

2. Войналович Н.М. Елементи комбінаторики в системі професійної підготовки вчителя. *Евристика та дидактика точних наук*. 1999. Вип. 10. С.44–50.

REFERENCES

1. Volkov, Yu.I., Voinalovych, N.M. (2000). *Elementy dyskretnoi matematyky* [Elements of discrete mathematics: A manual]. Kirovohrad.

2. Voinalovych, N.M. (1999). *Elementy kombinatoryky v systemi profesiinoi pidhotovky vchytelia* [Elements of combinatorics in the system of professional education of a teacher]. Donetsk.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ВОЛКОВ ЮРІЙ ІВАНОВИЧ – професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: дискретна математика.

ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцентка кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: методика навчання математики.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

VOLKOV Yurii Ivanovich – doctor of physics-mathematial sciences, professor, professor of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of research interests: Discrete Math.

VOJNALOVICH Natalia Mikhailivna – candidate of pedagogical sciences, docent of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of research interests: theory and methodology of teaching (mathematic).

Стаття надійшла до редакції 16.04.2021 р.